

# **Tesis Doctoral**

## Energías de Casimir en medios dieléctricos Aplicaciones

Karin Rébora

**Director:** Dr. Horacio A. Falomir

Departamento de Física  
Facultad de Ciencias Exactas  
Universidad Nacional de La Plata

23 de marzo de 2005



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
<b>2. El Efecto Casimir</b>	<b>9</b>
2.1. Introducción . . . . .	9
2.2. Definición de la energía de Casimir . . . . .	12
2.3. Regularización y renormalización de la energía de vacío . . . . .	20
2.4. Renormalización y condición de normalización . . . . .	25
2.5. Características de la dispersión en medios reales . . . . .	27
2.5.1. Modelo sencillo de dispersión . . . . .	28
2.5.2. Causalidad en la relación entre el campo eléctrico y el vector desplazamiento. Comportamiento general de la permitividad. .	30
<b>3. Divergencias en la energía de Casimir de un medio dieléctrico con comportamiento ultravioleta realista</b>	<b>35</b>
3.1. Introducción . . . . .	35
3.2. El modelo y su energía de Casimir . . . . .	37
3.3. Singularidades ultravioletas en la energía de Casimir . . . . .	44
3.4. Singularidades ultravioletas del modelo con conductividad . . . . .	45
3.5. Resumen y conclusiones . . . . .	48
<b>4. Energía de Casimir de un campo escalar con condiciones de con- torno dependientes de la frecuencia</b>	<b>51</b>
4.1. Introducción . . . . .	51
4.2. El modelo y su función $\zeta$ incompleta . . . . .	52
4.3. El número de modos que contribuyen . . . . .	57
4.4. Contribuciones dominantes a la energía de vacío . . . . .	59
4.5. Resumen y conclusiones . . . . .	61
<b>5. Energía de Casimir para medios dieléctricos dispersivos esférica- mente simétricos</b>	<b>63</b>
5.1. Introducción . . . . .	63
5.2. El modelo a bajas frecuencias y su función $\zeta$ incompleta . . . . .	66
5.2.1. El modelo . . . . .	66
5.2.2. La energía de vacío y la función $\zeta$ incompleta . . . . .	69

5.2.3.	Continuación analítica de la función $\zeta$ incompleta . . . . .	71
5.3.	El número de modos que contribuyen . . . . .	77
5.4.	Las contribuciones dominantes a la energía de vacío . . . . .	79
5.4.1.	Contribuciones de volumen . . . . .	79
5.4.2.	Correcciones de tamaño finito . . . . .	81
5.5.	La energía de Casimir . . . . .	84
5.5.1.	La presión electromagnética sobre la burbuja . . . . .	84
5.5.2.	La energía de Casimir . . . . .	86
5.6.	Aplicación a la sonoluminiscencia . . . . .	87
5.7.	Contribuciones de los modos de alta frecuencia . . . . .	89
5.7.1.	Contribución de altas frecuencias usando el Modelo de Drude .	90
5.8.	Resumen y conclusiones . . . . .	97
<b>6.</b>	<b>Resumen y conclusiones</b>	<b>101</b>
<b>A.</b>	<b>El fenómeno de la sonoluminiscencia y la propuesta de Schwinger</b>	<b>107</b>
A.1.	Breve descripción del fenómeno . . . . .	107
A.2.	La propuesta de Schwinger . . . . .	109
<b>B.</b>	<b>Funciones espectrales</b>	<b>111</b>
B.1.	Introducción . . . . .	111
B.2.	Funciones espectrales . . . . .	113
B.2.1.	Relación entre la distintas funciones espectrales . . . . .	115
<b>C.</b>	<b>Autofrecuencias de los modos TE y TM</b>	<b>119</b>
C.1.	Introducción . . . . .	119
C.2.	Hermiticidad . . . . .	120
C.3.	Las autofrecuencias . . . . .	124
C.4.	Las multiplicidades . . . . .	126
<b>D.</b>	<b>Cálculo numérico de partes finitas provenientes de altas frecuencias</b>	<b>131</b>
D.1.	Cálculo numérico . . . . .	131

# Capítulo 1

## Introducción

Los fenómenos físicos conocidos bajo el nombre general de Efecto Casimir [1, 2, 3] son de naturaleza cuántica, y están asociados con la existencia de oscilaciones de vacío de los campos cuánticos. El efecto surge como resultado de la distorsión que sufre la energía del estado de vacío de los campos debida a la presencia de contornos, topologías no triviales o campos de "background".

El cálculo de las primeras correcciones cuánticas a ésta y otras magnitudes físicas de la teoría cuántica de campos está íntimamente relacionado con el cálculo de funciones espectrales (como determinantes funcionales, heat-kernels y potencias complejas) de operadores elípticos asociados a las acciones que describen la dinámica de los campos.

Estos aspectos conforman lo que hoy se conoce como geometría espectral, y encuentran aplicación en diversas áreas de la Física y la Matemática [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14], presentando interés para materias tan variadas como lo son su relación con teoremas del índice [4], su aplicación a problemas de la cosmología cuántica [15], a modelos efectivos para las interacciones fuertes [16, 17, 18] y la materia condensada [19, 20].

En particular, la traza del heat kernel y la función  $\zeta$  asociada a ciertos sistemas elípticos de borde son de gran utilidad para la regularización [21] de acciones efectivas [22] y energías de Casimir [23].

Aquí trabajaremos sobre el problema del cálculo de ciertas funciones espectrales y su empleo para la determinación de energías de Casimir de campos definidos en regiones con borde y en presencia de backgrounds, así como en su aplicación a modelos de interés práctico.

Debido al progresivo avance en las técnicas experimentales, hoy en día es posible medir las fuerzas de Casimir con gran precisión [24]. De hecho, actualmente es tenida en cuenta como una componente determinante en las fuerzas que actúan sobre micro-dispositivos electro-mecánicos. En particular, el cálculo de energías de Casimir resulta de interés incluso en situaciones tan concretas como la búsqueda de una explicación para el fenómeno de la sonoluminiscencia [25], en el cual una

burbuja de gas en un fluido, atrapada en un nodo de velocidad de una onda sonora estacionaria, emite cortos e intensos pulsos de luz. Cada pulso contiene alrededor de un millón de fotones en el rango de la luz visible, y su duración es de sólo algunas decenas de picosegundos. La emisión de luz se produce cerca del final del rápido colapso que sufre la burbuja en cada ciclo, que reduce su radio unas diez veces desde un valor inicial de unos  $50 \mu\text{m}$ . Si se compara la energía emitida desde una región de esas dimensiones con la densidad de energía promedio transportada por la onda sonora, se concluye que en este fenómeno ocurre una *concentración de energía de 12 órdenes de magnitud*, lo que muestra el interés práctico de este problema (ver Apéndice A).

La idea de dar una explicación al fenómeno de la sonoluminiscencia [25] basada en la energía de Casimir de una burbuja en un medio dieléctrico fue desarrollada inicialmente por Schwinger [26]. Pero sobre ese punto hay aún un considerable desacuerdo [27, 28, 29, 30, 31, 32, 33].

En efecto, hay autores que basan sus cálculos en el desarrollo asintótico de la densidad de estados y en la existencia de un cut-off real en el número de onda (que refleja el comportamiento del índice de refracción del medio), obteniendo resultados que dan sustento a esa hipótesis [30, 31]. Además, en recientes trabajos [32, 33] se ha estudiado el problema de la emisión de fotones debida a un brusco cambio en las propiedades dieléctricas del medio (en el límite de grandes volúmenes), calculando el espectro de partículas emitidas a partir de la evaluación de los coeficientes de Bogoliubov que relacionan los estados inicial y final. Estos resultados también estarían de acuerdo con la explicación propuesta por Schwinger [26].

Por otra parte, hay autores [29, 27, 28] que están en franco desacuerdo con esa explicación del fenómeno, basándose en ciertos argumentos de renormalización para descartar términos de volumen y superficie en la energía de Casimir. Esos autores [29, 27, 28], estudiando sumas sobre autofrecuencias, no toman en cuenta la existencia de un cut-off físico en ese sistema, definiendo la energía de Casimir mediante regularizaciones que conducen a un resultado inconsistente con el experimento, tanto por su magnitud como por su signo.

En particular, no hay acuerdo acerca de la *renormalización* necesaria para remover las singularidades que aparecen en la energía de vacío, un hecho que oscurece la interpretación física de las partes finitas. El por qué de tales desacuerdos se puede entender recordando que la energía de vacío  $E_0$  del campo cuántico en consideración (calculado mediante algún mecanismo de regularización), puede considerarse como una corrección cuántica al sistema clásico. Como, en general,  $E_0$  contendrá una parte finita y una divergente, se acude al procedimiento de renormalización que consiste básicamente en sustraer la parte divergente de la energía de vacío y agregársela a la energía clásica del sistema, redefiniendo sus parámetros (como masa, constantes de acoplamiento, etc.) de manera tal que el resultado sea finito.

Sabemos que se desliza cierta arbitrariedad cuando se introduce una regularización, hecho que se traduce en que la parte finita de la energía de vacío regularizada dependa de la regularización elegida. Luego es necesario fijar alguna *condición*

de normalización sobre la energía renormalizada,  $E_{ren}$ , de manera que tenga un significado físico único.

Una condición *natural* para campos con masa es que  $E_{ren} \rightarrow 0$  cuando  $m \rightarrow \infty$ , ya que se puede argumentar que un campo masivo en el límite de masa infinita no debería tener fluctuaciones cuánticas.

Sin embargo, no hay una condición de normalización general para los campos sin masa.

De aquí pueden entenderse las discrepancias sobre la *renormalización* necesaria para remover las singularidades que aparecen en el estudio de la energía de vacío en presencia de dieléctricos: Por un lado, como el campo relevante es no masivo, no hay una condición de normalización que haga única a la parte finita de la energía de vacío. Por otro lado, en general el resultado para la parte divergente no es expresable en términos de funciones simples, de modo que los contraterminos necesarios son extremadamente complicados y la interpretación del modelo clásico asociado es poco clara.

De este modo, en cálculos con dieléctricos no dispersivos la presencia de divergencias ultravioletas dificulta la interpretación física de las partes finitas de la energía de vacío.

En ese contexto de controversia, resulta de sumo interés el estudio de la energía de Casimir en medios dieléctricos. Su estudio reviste interés tanto desde un punto de vista teórico, para dilucidar problemas referentes a la renormalización y condición de normalización que hemos mencionado antes, como para la comparación directa con el experimento, por ejemplo en el fenómeno de la sonoluminiscencia.

Nuestra propuesta para analizar el problema de la energía de Casimir en dieléctricos se basa en la suposición de que los inconvenientes que hemos mencionado pueden tener su origen en el hecho de que los modelos usualmente utilizados para describir medios dieléctricos no incorporan, en su mayoría, una relación de dispersión realista, dependiente de la frecuencia. Una consecuencia directa de ello es un comportamiento ultravioleta inadecuado, que lleva a la aparición de divergencias de las cuales es imposible extraer un valor finito para la energía de Casimir de una manera físicamente razonable.

Por este motivo, aquí analizaremos la energía de Casimir como función de las propiedades dieléctricas del medio. Y, en ese sentido, resulta natural su estudio en situaciones donde los dieléctricos se describen usando modelos *realistas*.

El método que emplearemos se basa en la suma sobre frecuencias propias del campo electromagnético. Esto requiere la introducción de una regularización para controlar las contribuciones de las altas frecuencias. Adoptaremos la técnica de la regularización  $\zeta$ , que consiste en la extensión analítica de la suma de potencias complejas de las autofrecuencias del campo cuántico relevante.

Dada la profunda conexión existente entre distintas funciones espectrales de operadores elípticos (como la función  $\zeta$ , la traza del llamado heat kernel, o el determi-

nante funcional) [4], la técnica de la función  $\zeta$  sirve como un marco de trabajo unificado en diferentes áreas de interés. Aquí desarrollaremos un método de cálculo de una función  $\zeta$  adecuada al estudio de la energía de Casimir como función de las propiedades dieléctricas del medio, en principio aplicable a distintas geometrías. Las divergencias ultravioletas de la Teoría Cuántica de Campos se presentan en este contexto como singularidades de la extensión meromorfa de estas funciones.

En primer lugar, en el capítulo 3 analizaremos el comportamiento de las divergencias en la energía de vacío cuando se utilizan modelos que describen medios dispersivos realistas. Estos modelos introducen una *frecuencia de plasma* en la permitividad, de manera tal que su comportamiento para altas frecuencias puede ser deducido a partir de la relación (causal) no local en el tiempo que existe entre el vector campo eléctrico y el vector desplazamiento eléctrico para medios dispersivos generales [34].

Bajo la hipótesis de que una relación de dispersión lo suficientemente realista podría actuar como un *regulador natural* de la energía de vacío, la propuesta es que la consideración de propiedades dispersivas sencillas pero realistas, tanto en el rango de altas como de bajas frecuencias, conducirá a una estructura simple de las singularidades, de manera que puedan ser separadas de las partes finitas mediante la introducción de contratérminos sencillos. Luego, las partes finitas así obtenidas ganan sentido físico tras un proceso de renormalización, pudiendo ser comparadas con el experimento [24].

Para el estudio de esas partes finitas, como primera medida, estableceremos en el capítulo 4 un método de cálculo para un modelo simplificado de un campo escalar, que simula el comportamiento de los índices de refracción a altas frecuencias y que se traduce en una *condición de contorno dependiente de la frecuencia*. El método de cálculo podrá luego ser utilizado en el estudio de situaciones de creciente complejidad, como sucede en el problema de la contribución de bajas frecuencias a la energía de vacío del campo electromagnético en medios dieléctricos. Este estudio será posteriormente ampliado en el capítulo 5, para analizar un modelo completo para la energía de Casimir, que toma en consideración de manera realista las contribuciones tanto de bajas como de altas frecuencias, esto es, un modelo que describe el rango completo de frecuencias de manera realista.

Los resultados serán aplicados, por un lado, a una situación de interés para la sonoluminiscencia, en búsqueda de una respuesta sobre el papel que puede desempeñar la energía de Casimir en ese fenómeno. Por otro lado, ellos serán analizados con el fin de dilucidar puntos oscuros como los mencionados arriba acerca de la renormalización de la energía de vacío en presencia de medios dieléctricos.

Comenzaremos, en el capítulo siguiente, con un repaso histórico del Efecto Casimir, su definición en el marco de la Teoría Cuántica de Campos, y una breve descripción de los aspectos generales referidos a los mecanismos de regularización y renormalización de la energía de vacío. El capítulo finaliza con una presentación de las propiedades dispersivas generales de los medios dieléctricos.



# Capítulo 2

## El Efecto Casimir

Los fenómenos físicos conocidos bajo el nombre general de Efecto Casimir son de naturaleza cuántica, y están asociados con la presencia de oscilaciones de punto cero en los estados de vacío de los campos cuánticos. El efecto surge como resultado de la distorsión de la energía de vacío de los campos debida a la presencia de contornos, topologías no triviales o campos de "background" en el dominio de cuantización.

Comenzamos en este capítulo dando, en la sección 2.1, un breve repaso de la historia del Efecto Casimir. En la sección 2.2 se da una definición de la energía de Casimir dentro del marco de la Teoría cuántica de campos. En las secciones 2.3 y 2.4 se describen los aspectos generales de los mecanismos de regularización y renormalización de la energía de vacío y se discuten los problemas que surgen en su aplicación para una correcta definición de la energía de Casimir en el caso de los medios dieléctricos. Por último, la sección 2.5 está dedicada a la descripción de las características dispersivas de los medios reales.

### 2.1. Introducción

El Efecto Casimir es un aspecto fundamental de la Teoría Cuántica de Campos, que se expresa usualmente como una *consecuencia observable de las fluctuaciones de vacío de los modos normales del campo cuántico bajo consideración*.

Históricamente, la primer predicción de este efecto la dio H. B. Casimir [1] en 1948 al sugerir que debía existir una fuerza atractiva entre dos placas metálicas descargadas, originada por el cambio en la energía de vacío del campo electromagnético producido por la presencia de las placas.

Casimir consideró un sistema formado por dos placas infinitas paralelas perfectamente conductoras y descargadas, ubicadas en el vacío y separadas por una distancia  $a$ . Aunque generalmente es aceptado que las oscilaciones de punto cero de los campos en el vacío del espacio ilimitado son no-observables, la presencia de contornos cambia esa situación. En efecto, Casimir observó que se podría medir la *diferencia*

entre la energía de punto cero del campo electromagnético en el espacio vacío y la energía de punto cero del mismo en presencia de contornos:

$$E_{Cas} = \sum \frac{1}{2} \hbar \omega_{cond} - \sum \frac{1}{2} \hbar \omega_{vac}, \quad (2.1)$$

donde los subíndices se refieren a los modos normales, de frecuencia  $\omega$ , del campo electromagnético en presencia de contornos conductores y en el vacío del espacio no-acotado, y las sumas son hechas sobre todos los posibles modos normales del campo en ambas situaciones (en la sección siguiente se dará una explicación detallada acerca de la definición de expresiones como (2.1)).

En (2.1), el cambio en el espectro de modos normales se debe a la anulación de la componente tangencial del campo eléctrico sobre la superficie de las placas metálicas, y eso es lo que produce un efecto observable. Por supuesto que la expresión (2.1) es puramente simbólica, ya que ambas sumas son divergentes. Casimir dio una definición adecuada a esas sumas (es decir, adoptó una *regularización* de las sumas divergentes que aparecen en (2.1), tema que se tratará en la sección 2.3), de la que fue capaz de extraer un resultado finito, la *Energía de Casimir* (por unidad de área de las placas) para esa geometría,

$$E_{Cas} = -\frac{\pi^2}{720} \frac{\hbar c}{a^3}, \quad (2.2)$$

donde  $a$  es la separación entre placas, o bien para la fuerza por unidad de área,

$$f = -\frac{dE_{Cas}}{da} = -\frac{\pi^2}{240} \frac{\hbar c}{a^4}. \quad (2.3)$$

Notar el signo menos en la expresión de  $f$ . Eso significa que la fuerza de Casimir es atractiva: las placas (descargadas) se atraen entre sí. Para placas  $1 \text{ cm}^2$  de área y una separación de  $a = 0,5 \mu\text{m}$ , esta fuerza es del orden de  $|f| \sim 0,2 \cdot 10^{-5} \text{ N}$ .

Esta atracción entre placas paralelas conductoras descargadas ubicadas en el vacío ha sido convincentemente demostrada por varios experimentos en los últimos años [35, 24, 36]. De hecho, actualmente es tomada en cuenta como una componente determinante en las fuerzas que actúan sobre micro-dispositivos electro-mecánicos[37, 38].

Pronto la atención sobre el Efecto Casimir se volcó hacia otras geometrías. En particular, para geometrías esféricas el interés en el estudio de la energía de Casimir fue motivado por otro trabajo del propio Casimir [39] de 1956, en el cual sugirió que una fuerza de vacío atractiva podría balancear la repulsión de Coulomb en un modelo semiclásico para el electrón. Sin embargo Timothy Boyer [40] en 1968, con su cálculo del cambio en la energía de Casimir debido a la presencia de una capa esférica conductora, echó por tierra el modelo de Casimir para el electrón, ya que el signo de la fuerza resultante era el *contrario* del supuesto por Casimir.

El resultado de Boyer, que mostró que la *geometría* juega un papel poco previsible en cálculos de la Energía de vacío, impulsó su estudio por diversos grupos y con diversas técnicas de trabajo (técnicas de scattering multiple [41, 42], técnicas involucrando funciones de Green [43], técnicas basadas en teoría de fuentes [44], etc).

Como la aparición de fuerzas de Casimir entre cuerpos rígidos es esencialmente la única manifestación macroscópica de las fluctuaciones de vacío de los campos cuánticos, fue interesante no sólo investigar el efecto para varias configuraciones geométricas, sino también incluir paredes ideales y semipermeables, paredes rugosas y problemas no-estacionarios con contornos móviles. También fue investigado el Efecto Casimir a temperaturas distintas del cero absoluto [45, 46, 47] entre 1950 y 1960, con resultados que aún hoy resultan controversiales [48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55].

Cabe señalar que desde los comienzos del Efecto Casimir, el fenómeno fue considerado como una consecuencia de las fuerzas de van der Waals entre moléculas, en el sentido de que las fuerzas de Casimir entre cuerpos macroscópicos ocasionadas por las oscilaciones de punto cero del campo electromagnético fueron interpretadas como un caso límite de la interacción de van der Waals [56, 57]. En realidad, hasta la actualidad sólo se ha podido mostrar que ambas aproximaciones dan los mismos resultados para medios *diluidos* únicamente [27, 58].

De cualquier manera, un Efecto Casimir causado por cambios en el espectro de oscilación de punto cero de *otros* campos en dominios espaciales acotados, o de *todos* los campos (incluyendo el electromagnético) en espacios con topologías no-triviales, ciertamente no puede reducirse a un fenómeno de fuerzas de van der Waals, dándole al Efecto Casimir el status de un tema de estudio independiente.

Así, desde principios de 1970 el Efecto Casimir fue estudiado en diversas áreas. Por ejemplo, su aparición en cosmología está asociada con la posible topología no-euclídea del espacio-tiempo [59, 2]. Análogamente a lo que ocurre en presencia de cuerpos materiales, en espacios topológicamente no-triviales el espectro de oscilación de punto cero difiere del caso de Minkowski, resultando en una densidad de energía de vacío no nula que permitiría, en principio, determinar la topología global del Universo por medio de medidas locales.

También el Efecto Casimir ha cobrado importancia en física hadrónica en la construcción del modelo de la bolsa [60, 61, 62, 63], donde el confinamiento de quark se asegura postulando la ausencia de corriente a través de la superficie de la bolsa. La energía de Casimir de los campos de quark y de gluones debe ser incluida en la energía total de la bolsa cuando se calculan propiedades hadrónicas.

Pero más allá de los aspectos aplicados mencionados arriba, desde un punto de vista teórico la investigación del Efecto Casimir presenta aspectos de interés para la Teoría Cuántica de Campos y la Física Matemática, en tanto que requiere de nuevos métodos para aislar y remover divergencias de los valores de expectación de vacío

de los operadores correspondientes a observables físicos<sup>1</sup>.

Un caso de particular interés es el estudio del Efecto Casimir en presencia de medios dieléctricos. Allí los principales temas a desarrollar están ligados al problema de la *regularización y renormalización* de la energía de vacío. En los últimos tiempos su estudio ha cobrado creciente importancia debido a la existencia de fenómenos en donde se ha sugerido que este efecto podría jugar un papel importante. Uno de los ejemplos más interesantes es el fenómeno de la *sonoluminiscencia* [64, 25], que se describe en el capítulo 5.

Por otro lado, el estudio de la energía de Casimir en presencia de medios dieléctricos es un tema sobre el cual aún hoy quedan aspectos no resueltos. Para entender estos aspectos, relacionados como se dijo antes con la adecuada regularización y renormalización de singularidades en la energía de vacío, conviene primero revisar más detalladamente el Efecto Casimir en el marco de una teoría cuántica de campos.

## 2.2. Definición de la energía de Casimir

La esencia de la física cuántica son las fluctuaciones. El principio de Heisenberg implica que el conocimiento preciso de la posición de una partícula implica perder todo conocimiento sobre su momento y viceversa, y el producto de las incertezas de una coordenada generalizada  $q$  y de su momento conjugado  $p$  está acotado por debajo,

$$\Delta q \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (2.4)$$

lo que refleja la relación de conmutación fundamental

$$[q, p] = i\hbar. \quad (2.5)$$

El Hamiltoniano, en general, no conmuta con  $q$  ni con  $p$ ; esto significa que en un autoestado de energía las fluctuaciones en  $q$  y  $p$  son ambas no-nulas:

$$\Delta q > 0, \quad \Delta p > 0. \quad (2.6)$$

Mas aún, un oscilador armónico tiene, correspondientemente, una energía de su estado fundamental no-nula. En efecto,

$$E_n^{osc.} = \hbar \omega \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

---

<sup>1</sup>Un problema teórico interesante es el de las llamadas *divergencias superficiales*. Para dominios compactos acotados por superficies cerradas (por ejemplo el interior de una esfera), la densidad de energía de vacío regularizada se hace infinita sobre el contorno de la superficie. Estas singularidades superficiales pueden removerse, por ejemplo, si se considera la suma de las energías de vacío del problema interior y exterior [3, 65] y también, como veremos más adelante, al considerar modelos de dieléctricos realistas.

La implicación aparente de esto es que, por ejemplo, un cristal (que puede pensarse de manera grosera como una colección de átomos contenidos en potenciales armónicos) debería tener una gran energía de punto cero a temperatura cero:

$$E_0 = \sum_{\text{atomos}} \frac{1}{2} \hbar \omega, \quad (2.8)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia característica de cada oscilador.

De manera similar, un campo cuántico puede considerarse, en primera aproximación, como una colección infinita de osciladores armónicos desacoplados, que representan las fluctuaciones de los campos.

Para introducir el problema de las energías de vacío en Teoría Cuántica de Campos, conviene primero repasar brevemente los lineamientos generales del mecanismo de cuantificación canónica. Para simplificar, lo haremos en el caso sencillo de un campo escalar real  $\Phi$ , libre y de masa  $m$ , para luego investigar lo que sucede cuando se varían las condiciones de contorno impuestas al sistema.

En la teoría clásica de un campo escalar  $\Phi$ , cuya dinámica está dictada por la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2, \quad (2.9)$$

el campo  $\Phi(\vec{x}, t)$  satisface la ecuación clásica de movimiento de Klein-Gordon,

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \Phi = 0, \quad (2.10)$$

que resulta de las ecuaciones de Euler-Lagrange para este sistema.

En la formulación Hamiltoniana, el campo canónicamente conjugado a  $\Phi$  es  $\Pi(\vec{x}, t) = \partial_0 \Phi(\vec{x}, t)$ , de modo que el Hamiltoniano del sistema y las ecuaciones clásicas de movimiento (en el lenguaje de Corchetes de Poisson) son

$$H[\Phi, \Pi] = \int_t d^3x [\Pi \partial_0 \Phi - \mathcal{L}],$$

$$\{\Pi(\vec{x}, t), \Phi(\vec{y}, t)\} = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad \{\Pi, \Pi\} = 0, \quad \{\Phi, \Phi\} = 0, \quad (2.11)$$

$$\{H, \Phi\} = \partial_0 \Phi, \quad \{H, \Pi\} = \partial_0 \Pi,$$

de donde se ve que el Hamiltoniano del sistema es el generador de las traslaciones temporales.

En la correspondiente teoría cuántica, los campos canónicamente conjugados  $\Phi$  y  $\Pi$  son representados por operadores que satisfacen relaciones de conmutación sugeridas por los corchetes de Poisson clásicos. A tiempos iguales:

$$[\Pi(\vec{x}, t), \Phi(\vec{y}, t)] = -i \hbar \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad [\Pi, \Pi] = 0, \quad [\Phi, \Phi] = 0. \quad (2.12)$$

En el esquema de Heisenberg, la evolución temporal de los operadores  $\Phi$  y  $\Pi$  viene dada por las ecuaciones de Heisenberg

$$[H, \Phi] = -i \hbar \partial_0 \Phi, \quad [H, \Pi] = -i \hbar \partial_0 \Pi, \quad (2.13)$$

donde  $H$ , el operador Hamiltoniano, se infiere a partir de la teoría clásica, simetrizando las expresiones para que resulte hermitico.

También hay que especificar el espacio de Hilbert sobre el cual actúan los operadores de campo. Los operadores  $\Phi$  y  $\Pi$  de un campo escalar se pueden desarrollar en términos de los operadores  $a_k^+$  y  $a_k$ , que se interpretan como operadores de creación y destrucción de partículas de masa  $m$  y tetraimpulso  $k_\mu = (k^0, \vec{k}) = (\omega_k, \vec{k})$ , donde  $k_\mu k^\mu = \omega_k^2 - k^2 = m^2$  (notar que las frecuencias propias  $\omega_k^2$  son autovalores del operador  $-\Delta + m^2$ ), y satisfacen las reglas de conmutación

$$\begin{aligned} [a_k, a_q^+] &= 2 \omega_k \delta^3(\vec{k} - \vec{q}), \\ [a_k, a_q] &= [a_k^+, a_q^+] = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

El operador de campo a todo tiempo se puede obtener a partir del conocimiento de la evolución temporal de  $a_k^+$  y  $a_k$ , la que se obtiene de sus relaciones de conmutación con el Hamiltoniano del sistema. Se tiene

$$a_k^+(t) = a_k^+ e^{i\omega_k t}, \quad a_k(t) = a_k e^{-i\omega_k t}. \quad (2.15)$$

La interpretación de los operadores  $a_k^+$  y  $a_k$  como operadores de creación y destrucción de partículas de masa  $m$  y tetraimpulso  $k_\mu$  implica la existencia de un estado de vacío que satisface

$$a_k|0\rangle = 0, \quad \forall k, \quad (2.16)$$

a partir del cual se construye el espacio de Hilbert por aplicación de  $a_k^+$ .

De lo expuesto arriba se ve que tanto el operador de campo como los estados cuánticos permitidos dependerán (a través de las frecuencias propias  $\omega_k$ ) de las condiciones de contorno impuestas al sistema. Para ilustrar mejor este punto y entender sus consecuencias, consideremos dos situaciones (por simplicidad tomemos sólo una dimensión espacial):

a) Campo escalar libre definido en toda la recta  $-\infty < x < \infty$ :

El operador de campo  $\Phi$  desarrollado en términos de los operadores  $a_k^+$  y  $a_k$  es

$$\Phi(x, t) = \int \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{(4\pi\omega_k)^{1/2}} [a_k e^{-i(\omega_k t - kx)} + a_k^+ e^{i(\omega_k t - kx)}], \quad (2.17)$$

donde  $\omega_k^2 = k^2 + m^2$ ,  $-\infty < k < \infty$ , y el operador Hamiltoniano  $H$  resulta

$$H = \int \frac{dk}{2\pi} \omega_k [a_k^+ a_k + \frac{1}{2}]. \quad (2.18)$$

b) Campo definido en el segmento  $[0, a]$ , con condiciones de contorno de Dirichlet,  $\Phi(a, t) = \Phi(0, t) = 0$ :

Aquí el operador de campo en términos de los operadores  $a_k^+$  y  $a_k$  resulta

$$\Phi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a \omega_n)^{1/2}} [a_n e^{-i\omega_n t} + a_n^+ e^{i\omega_n t}] \quad (2.19)$$

donde  $\omega_n^2 = k_n^2 + m^2$ ,  $k_n = \frac{n\pi}{a}$ ,  $n \in Z$ , mientras que para el operador  $H$  queda

$$H = \sum_n \omega_n \left[ a_n^+ a_n + \frac{1}{2} \right]. \quad (2.20)$$

Una comparación de las expresiones (2.17) y (2.19) muestra que tanto el operador de campo como los estados cuánticos permitidos dependen de las condiciones de contorno. En particular el estado de vacío  $|0\rangle$  definido en (2.16) depende de las condiciones de contorno.

Un cálculo de la energía de vacío, valor medio de vacío del operador  $H$ , conduce a las siguientes expresiones formales:

para a)

$$E_{0M} = \langle 0_M | H | 0_M \rangle = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \sqrt{m^2 + k^2} L, \quad (2.21)$$

donde  $L \rightarrow \infty$  es la *longitud* del espacio accesible.

para b)

$$E_0 = \langle 0 | H | 0 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{m^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}. \quad (2.22)$$

Aunque las cantidades  $E_0$  y  $E_{0M}$  son ambas infinitas, se puede mostrar que la *diferencia* entre sus densidades es una magnitud finita. Pero primero habrá que definir adecuadamente expresiones como las (2.21) y (2.22): en general la expresión para la energía de vacío aparece como una suma o integral divergente, de manera que expresiones como las de (2.21) y (2.22) son sólo *formales*. Luego, para darles un sentido matemático preciso se recurre a esquemas de *regularización*.

Por ejemplo, podemos forzar la convergencia de (2.21) y (2.22) introduciendo una función de corte exponencial y *definiendo*

$$E_0(a) := \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{a} e^{-\alpha \frac{n\pi}{a}} \Big|_{\alpha \rightarrow 0^+}, \quad \frac{E_{0M}}{L} := \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} |k| e^{-\alpha |k|} \Big|_{\alpha \rightarrow 0^+} \quad (2.23)$$

donde se ha considerado el caso simplificado de masa nula,  $m = 0$ . En (2.23), el símbolo  $|_{\alpha \rightarrow 0^+}$  significa tomar, al final del cálculo, la extensión analítica de esa función del *regulador*  $\alpha$  al valor *físico* de ese parámetro,  $\alpha = 0$ .

Para  $\alpha > 0$ ,

$$\begin{aligned} E_0(a; \alpha) &= \frac{\pi}{8a} \sinh^{-2}\left(\frac{\pi \alpha}{2a}\right) = \\ &= \frac{a}{2\pi \alpha^2} + \mathcal{E}(a) + O(\alpha^2), \quad \mathcal{E}(a) = \frac{-\pi}{24a}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$E_{0M}(\alpha) = \frac{L}{2\pi \alpha^2}.$$

Nótese que las partes singulares de las densidades lineales de energía son idénticas, de modo que su diferencia es una cantidad finita:

$$E_0(a; \alpha) - \left( \frac{E_{0M}}{L}(\alpha) \right) a = \mathcal{E}(a) + O(\alpha^2)|_{\alpha=0} = \mathcal{E}(a), \quad (2.25)$$

donde  $\mathcal{E}(a)$  es la *energía de Casimir* del sistema.

Aquí la magnitud finita  $\mathcal{E}(a)$  se obtuvo removiendo la contribución divergente de la energía de vacío regularizada  $E_0(a; \alpha)$ , tomando como punto de comparación la densidad de energía de vacío correspondiente al espacio ilimitado. En ese sentido, una condición de consistencia para esta definición es que se satisfaga que  $\mathcal{E}(a) \rightarrow 0$  cuando  $a \rightarrow \infty$ .

Se puede calcular ahora la fuerza entre contornos (extremos del intervalo):

$$F(a) = -\frac{\partial \mathcal{E}(a)}{\partial a} = -\frac{\pi}{24 a^2}. \quad (2.26)$$

Esta fuerza, que resulta atractiva y tiende a 0 cuando  $a \rightarrow \infty$ , es llamada *fuerza de Casimir*.

Esa fue la idea básica del trabajo de Casimir de 1948 para su cálculo de la fuerza entre placas paralelas descargadas [1].

Como se ha mostrado en este ejemplo sencillo, lo que tiene sentido calcular son las *diferencias* de energías de vacío, así que en el caso general se define la energía de vacío *renormalizada*  $\mathcal{E}$  como la diferencia entre los valores medios de vacío (regularizados) del Hamiltoniano para el problema en cuestión y la energía contenida en esa misma región para el caso del campo libre sin limitaciones en el espacio de Minkowski. Siguiendo la notación de los ejemplos *a)* y *b)*, definimos

$$\mathcal{E}(a) = (\langle 0|H|0 \rangle_\alpha - \langle 0_M|H|0_M \rangle_\alpha)|_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \quad (2.27)$$

donde  $\alpha$  es el parámetro correspondiente a alguna regularización para esas expresiones (de otro modo divergentes), y el límite significa tomar la continuación analítica al valor *físico* del parámetro,  $\alpha_0$ , una vez efectuada la sustracción<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>Es usual en teoría cuántica de campos en espacios no acotados, adoptar la prescripción de *orden normal* para los operadores. En el caso del operador Hamiltoniano esto corresponde a restar la energía de vacío, lo que hace que el operador Hamiltoniano en orden normal tenga un valor medio de vacío nulo. Pero ¿cuál es el valor de la energía de vacío en presencia de campos de background y/o cuando el campo cuántico ocupa una región espacial acotada y está, en consecuencia, sujeto a condiciones de contorno?. Es fácil entender que en el caso de un campo definido en una región acotada existirá un conjunto infinito de estados de vacío diferentes para configuraciones geométricas o condiciones de contorno diferentes. Por ejemplo, modificando los valores de los parámetros, como una longitud  $a$ , se podrá pasar de un estado de vacío a otro con una diferencia de energía de vacío que resultará, en general, divergente. Luego se ve claramente que aunque se preasigne un valor de energía nulo a algún estado, el problema resurge al variar los parámetros del sistema. En consecuencia, en cálculos del Efecto Casimir no tiene sentido tomar los operadores Hamiltonianos en orden normal.



Por otra parte, para una correcta determinación de la energía de Casimir  $\mathcal{E}$  es necesario que su valor no dependa de la regularización adoptada. Este es verdaderamente el caso para el ejemplo del campo escalar que se discutió anteriormente, como se puede ver fácilmente considerando otras regularizaciones en (2.23).

Para ilustrar esto consideremos de nuevo el caso del campo escalar sin masa, pero ahora restringido al espacio entre dos placas paralelas infinitas. Este problema es análogo al del ejemplo b), pero considerado ahora en tres dimensiones espaciales y satisfaciendo condiciones de contorno de Dirichlet sobre las placas,

$$\Phi(a, y, z, t) = \Phi(0, y, z, t) = 0. \quad (2.28)$$

Las frecuencias propias son  $\omega_n = (k_n^2 + k_y^2 + k_z^2)^{\frac{1}{2}}$  con  $k_n = \frac{n\pi}{a}$ ,  $n \in N$ ,  $k_y, k_z \in \mathbb{R}$ . Luego, la energía de vacío por unidad de área de las placas está dada por

$$\frac{E_0}{A} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_y dk_z}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + k_y^2 + k_z^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.29)$$

Esta energía de vacío por unidad de área transversal es divergente ya que tanto la suma como las integrales son no convergentes. Luego, como hicimos antes, para darle una interpretación debemos regularizar esa expresión, aislar las partes singulares y después renormalizar (cuando sea posible) incorporando contratérminos en la energía clásica del sistema mediante consideraciones físicas.

Para ver que  $\mathcal{E}$  en este ejemplo no depende de la regularización elegida, calcularemos (2.29) por dos métodos distintos. El primer método que usaremos es conocido como regularización zeta, basado en las propiedades de analiticidad de la *función zeta* de un operador que depende del sistema físico considerado y que, en este caso, es el laplaciano. En el Apéndice B se dará una definición formal de la función espectral conocida como función zeta. En el marco de esta regularización, definimos

$$\frac{E_0}{A} := \frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_y dk_z}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \left( \frac{n\pi}{\mu a} \right)^2 + \left( \frac{k_y}{\mu} \right)^2 + \left( \frac{k_z}{\mu} \right)^2 \right)^{-\frac{s}{2}} \Bigg|_{s=-1}. \quad (2.30)$$

Aquí  $s$  es una variable compleja, con  $\mathcal{R}(s)$  lo suficientemente grande como para garantizar la convergencia absoluta de (2.30). En esa región (2.30) define una función analítica de  $s$ . Luego la energía de vacío estará definida a través de su extensión analítica a  $s = -1$ . El parámetro  $\mu$ , con dimensiones de masa, se introdujo para que la cantidad dentro de la suma sea adimensional. Ahora bien, usando que

$$z^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt t^{s-1} e^{-zt}, \quad \mathcal{R}(s) > 0, \quad \mathcal{R}(z) > 0, \quad (2.31)$$

la ecuación (2.30) también puede escribirse como

$$\frac{E_0}{A} = \frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_y dk_z}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})} \int_0^{\infty} dt t^{\frac{s}{2}-1} e^{-((\frac{n\pi}{\mu a})^2 + (\frac{k_y}{\mu})^2 + (\frac{k_z}{\mu})^2)t} \Bigg|_{s=-1}. \quad (2.32)$$

Para  $\mathcal{R}(s)$  suficientemente grande puede invertirse el orden de las integrales y la suma, de modo que

$$\frac{E_0}{A} = \frac{\mu}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})} \int_0^{\infty} dt t^{\frac{s}{2}-1} e^{-((\frac{n\pi}{\mu a})^2)t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_y dk_z}{(2\pi)^2} e^{-((\frac{k_y}{\mu})^2 + (\frac{k_z}{\mu})^2)t} \Big|_{s=-1}. \quad (2.33)$$

Resolviendo las integrales gaussianas y usando nuevamente la ecuación (2.31) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{E_0}{A} &= \frac{\mu^3}{8\pi} \frac{\Gamma(\frac{s}{2} - 1)}{\Gamma(\frac{s}{2})} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{\mu a}\right)^{2-s} \Big|_{s=-1} = \\ &= \frac{\mu^3}{4\pi(s-2)} \left(\frac{\mu a}{\pi}\right)^{s-2} \zeta_R(s-2) \Big|_{s=-1}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

En (2.34) hemos usado la definición de la función zeta de Riemann,

$$\zeta_R(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \quad (2.35)$$

cuyas propiedades de analiticidad son bien conocidas [66]: la serie en (2.35) define una función analítica para  $\mathcal{R}(s) > 1$ , cuya extensión analítica al plano complejo  $s$  presenta un único polo simple en  $s = 1$  de residuo 1. En particular,  $\zeta_R(s-2)$  es finita para  $s = -1$  y su valor es  $\frac{1}{120}$ .

Luego, nuestro resultado final para la energía de vacío es

$$\frac{E_0}{A} = -\frac{\pi^2}{1440 a^3}. \quad (2.36)$$

Como vemos, la regularización zeta da, en éste caso simple, un resultado finito (es decir, esta regularización asigna a la parte singular un valor nulo).

Ahora vamos a comparar el resultado (2.36) con el dado por otra regularización, la correspondiente a la introducción de un corte exponencial [67, 68], que está basada en el uso de otra función espectral conocida como la *traza del heat-kernel* (este tipo de regularización ya fue utilizada en el primer ejemplo, ecuación (2.23)).

En el presente caso definimos

$$\begin{aligned} \frac{E_0}{A} &:= \frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_y dk_z}{(2\pi)^2} \times \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \left( \left(\frac{n\pi}{\mu a}\right)^2 + \left(\frac{k_y}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{k_z}{\mu}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} e^{-((\frac{n\pi}{\mu a})^2 + (\frac{k_y}{\mu})^2 + (\frac{k_z}{\mu})^2)^{\frac{1}{2}} t} \Big|_{t=0^+} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Aquí, de nuevo podemos intercambiar sumas con integrales pues la convergencia está asegurada por la exponencial. La ecuación (2.37) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \frac{E_0}{A} = & -\frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_y dk_z}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-((\frac{n\pi}{\mu a})^2 + (\frac{k_y}{\mu})^2 + (\frac{k_z}{\mu})^2)^{\frac{1}{2}} t} \Big|_{t=0^+} = \\ & -\frac{\mu}{4\pi} \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} dk k \sum_{n=1}^{\infty} e^{-((\frac{n\pi}{\mu a})^2 + (\frac{k}{\mu})^2)^{\frac{1}{2}} t} \Big|_{t=0^+}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Después de intercambiar la suma con la integral y cambiar la variable de integración,

$$\frac{E_0}{A} = -\frac{\mu^3}{2} \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(\frac{n\pi}{\mu a})^2}^{\infty} dk e^{-k^{\frac{1}{2}} t} \Big|_{t=0^+}. \quad (2.39)$$

La suma en (2.39) puede ser evaluada por medio de la formula de suma de Euler-Maclaurin [69]

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = -\frac{1}{2}f(0) + \int_0^{\infty} f(x) dx - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} B_{2k} f^{(2k-1)}(0), \quad (2.40)$$

donde los  $B_{2k}$  son los números de Bernoulli.

Usando (2.40), el resultado final para la energía de vacío en esta regularización es

$$\frac{E_0}{A} = \frac{3 a \mu^4}{2 \pi^2 t^4} - \frac{\mu^3}{4 \pi t^3} - \frac{\pi^2}{1440 a^3} + \mathcal{O}(t). \quad (2.41)$$

Notar que en el resultado (2.41) aparecen dos términos divergentes en el límite  $t \rightarrow 0^+$ , en forma de polos múltiples. El primero corresponde a un término de volumen, y puede ser interpretado como la energía de vacío del espacio no acotado contenida en una región de volumen  $V = aA$ . El segundo término divergente es una contribución de superficie. Ambos pueden ser eliminados requiriendo que  $\frac{E_0 + E_{clas}}{A} \rightarrow 0$  cuando  $a \rightarrow \infty$ , donde  $E_{clas}$  es la *energía asociada al sistema clásico* (lo que será discutido con mayor detalle en la sección 2.4).

Esto puede lograrse mediante una *renormalización* de la energía clásica del sistema, que en este problema toma la forma

$$E_{clas} = p_0 a A + \sigma_0 A, \quad (2.42)$$

donde  $p_0$  es una *presión* y  $\sigma_0$  es una *tensión superficial*. Se trata entonces de definir esas cantidades de manera tal que los *parámetros fenomenológicos*

$$p := p_0 + \frac{3 \mu^4}{2 \pi^2 t^4}, \quad \sigma := \sigma_0 - \frac{\mu^3}{4 \pi t^3} \quad (2.43)$$

(que incluyen las contribuciones cuánticas y deben ser determinados experimentalmente) resulten finitos.

En esas condiciones, vemos que la parte finita remanente de (2.41) coincide con el resultado obtenido a partir de la regularización zeta, ecuación (2.36).

Entonces, hemos mostrado que para el caso sencillo de un campo escalar sin masa que satisface condiciones de contorno de Dirichlet sobre dos planos separados por una distancia  $a$ , el valor de la energía de Casimir  $\mathcal{E}(a)$  es el mismo para las dos regularizaciones consideradas. Por el contrario, las partes divergentes dependen de la regularización, siendo nulas para la regularización zeta, y teniendo la forma de polos múltiples en  $t = 0$  en la regularización exponencial.

Es importante reconocer también que esas partes singulares muestran una dependencia con la distancia  $a$  diferente de la correspondiente a la parte finita (lo que permite diferenciar una de otra), y que además es consistente con la forma que *razonablemente* puede asignarse a la energía de un modelo clásico, que incorpora densidades de energía volumétricas y superficiales (una presión y una tensión superficial). Entonces, estos parámetros pueden ser elegidos adecuadamente para compensar las partes divergentes de las primeras contribuciones cuánticas, conduciendo a un resultado finito, con un sentido físico bien determinado.

Sin embargo, en casos más generales, las partes divergentes pueden tener una dependencia de la geometría que no permita diferenciarlas de las partes finitas, dificultando su interpretación física. En ciertos casos el problema se salva fijando alguna *condición de normalización*, aunque veremos que en situaciones más complejas, por ejemplo problemas que involucren medios dieléctricos con permitividades constantes, esto último no es posible.

## 2.3. Regularización y renormalización de la energía de vacío

Es importante discutir los procedimientos generales de regularización y renormalización formulados en el marco de una teoría cuántica de campos sometidos a condiciones de contorno. En esta sección resumiremos algunos resultados sobre la regularización  $\zeta$ , discutidos con más detalle en el Apéndice B, ya que ese será el método que utilizaremos en los cálculos de los capítulos siguientes. Sobre la regularización exponencial, sólo mencionaremos algunos resultados con el fin de comparación. Exposiciones detalladas sobre las definiciones y propiedades de ambos mecanismos de regularización pueden encontrarse en [67, 68, 70, 71, 72].

Como se discutió en la sección anterior, la cantidad básica que aparece en conexión con el Efecto Casimir es el valor medio de vacío del operador Hamiltoniano del campo cuántico bajo consideración. Pero, en general, las expresiones resultantes para la energía de vacío, de la forma  $E_0 = \frac{1}{2} \sum_n \omega_n$ , son puramente formales. Luego, con el objeto de darles un sentido matemático preciso, se recurre a algún esquema de regularización.

Por simplicidad, consideremos nuevamente el caso de un campo escalar, ahora en un espacio-tiempo  $(d+1)$ -dimensional, donde  $d$  es la dimensión de una variedad espacial compacta  $M$ . En la expresión para la energía de vacío, las  $\omega_n$  son las energías propias del campo,  $\omega_n = \lambda_n^{1/2}$ , donde los  $\lambda_n$  son los autovalores de un problema de valores de borde  $D_B$ ,

$$\begin{aligned} D\varphi_n &= \lambda_n \varphi_n, \\ B\varphi_n &= 0, \end{aligned} \tag{2.44}$$

donde  $D$  es un operador diferencial de segundo orden sobre la variedad  $M$ , y  $B$  es el operador que define las condiciones de contorno. Así,  $D_B$  simboliza el problema de valores de borde asociado al operador  $D$  con dominio en el conjunto de funciones definidas sobre  $M$  que satisfacen las condiciones de contorno (2.44).

En la regularización  $\zeta$ , la energía de vacío se define como

$$E_\zeta := \frac{\mu}{2} \sum_n \left( \frac{\lambda_n}{\mu^2} \right)^{-\frac{s}{2}} \bigg|_{s=-1}, \tag{2.45}$$

donde el parámetro  $\mu$ , con dimensiones de masa, se introduce para asegurar que  $E_\zeta$  tenga las dimensiones correctas para todo  $s$ , haciendo que la cantidad dentro de la suma sea adimensional.

Este método de regularización está basado en las propiedades de analiticidad de la función espectral conocida como función  $\zeta$  de un operador. En el apéndice B se da una definición formal de esta función espectral y las condiciones bajo las cuales puede ser definida. A continuación sólo mencionaremos algunos resultados bien conocidos. En una serie de trabajos publicados entre 1967 y 1969, R.T. Seeley [70, 71, 72] estudió la existencia y propiedades de la resolvente  $(A - \lambda)^{-1}$  de un operador diferencial  $A$  con coeficientes infinitamente derivables definido sobre secciones de un fibrado vectorial sobre una variedad de base compacta  $M$  con borde suave  $\partial M$ . El procedimiento utilizado consiste en construir una aproximación al núcleo de la resolvente  $(A - \lambda)^{-1}$ , con  $\lambda \in \mathbb{C}$ , para grandes valores de  $|\lambda|$  a partir de una aproximación al símbolo de la resolvente. Esto permite, por su parte, definir e investigar las propiedades del operador pseudodiferencial  $A^{-s}$ , para una variable  $s \in \mathbb{C}$ .

Los trabajos [70, 71, 72] contienen un resultado fundamental en la teoría de las funciones espectrales: la traza de  $A^{-s}$ , también denominada función- $\zeta$  del operador  $A$ , es una función meromorfa de la variable  $s$  cuyas únicas singularidades consisten en una sucesión de polos simples  $s_n$  ubicados en puntos del eje real dados por

$$s_n = \frac{d-n}{m} \quad \text{con} \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{2.46}$$

donde la cantidad  $d$  designa la dimensión de la variedad  $M$  y  $m$  el orden del operador diferencial  $A$ .

Cuando el operador tiene un conjunto completo de autofunciones, su función zeta puede expresarse en términos de los correspondientes autovalores,

$$\zeta_A(s) = \zeta(s, A) := \text{Tr } A^{-s} = \sum_k \lambda_k^{-s}. \quad (2.47)$$

Es notable que la ubicación de los polos de la función espectral  $\zeta(s, A)$ , sólo dependan del orden del operador  $A$  y de la dimensión de la variedad  $M$ . No depende, por ejemplo, de parámetros externos que aparecen en los coeficientes del operador diferencial ni de la forma funcional de estos coeficientes<sup>3</sup>.

Luego, para la energía de vacío regularizada *à la zeta* en el problema de valores de borde  $D_B$ , ecuación (2.45)), se tiene

$$E_\zeta = \frac{\mu}{2} \sum_n \left( \frac{\lambda_n}{\mu^2} \right)^{-\frac{s}{2}} \Big|_{s=-1} = \frac{\mu}{2} \zeta\left(\frac{s}{2}, \frac{D_B}{\mu^2}\right) \Big|_{s=-1}. \quad (2.48)$$

Como mencionamos arriba, para operadores con coeficientes suaves la función  $\zeta$  del operador correspondiente se extiende a una función meromorfa cuyas singularidades son polos simples ubicados en el eje real. En el problema de valores de borde  $D_B$ , se puede ver que  $\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(\frac{s}{2}, \frac{D_B}{\mu^2})$  presenta la siguiente estructura de singularidades:

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta\left(\frac{s}{2}, \frac{D_B}{\mu^2}\right) = \sum_{j=1}^N \frac{2a_j}{s+j-d} + r_N\left(\frac{s}{2}\right) \quad (2.49)$$

donde  $r_N(\frac{s}{2})$  es analítica para  $\mathcal{R}(s) > d - N - 1$ , y los coeficientes  $a_j$  están determinados por los coeficientes de Seeley integrados (un cálculo detallado de este resultado puede encontrarse en [67]).

La ecuación (2.49) muestra claramente que la energía de vacío, evaluada a través de la regularización zeta, presenta una singularidad de la forma de un polo simple en  $s = -1$  con residuo proporcional  $a_{d+1}$ . En consecuencia, la parte singular que separa esta regularización será no nula en la medida en que  $a_{d+1} \neq 0$ .

---

<sup>3</sup>No obstante, el resultado (2.46) es válido bajo las hipótesis mencionadas, o sea que la variedad  $M$  debe ser compacta y su borde  $\partial M$  suficientemente suave. También existen restricciones sobre las condiciones de contorno del problema, esto es, sobre el comportamiento de las funciones del dominio  $\mathcal{D}(A)$  del operador en el borde  $\partial M$  de la variedad. Las condiciones de contorno deben estar definidas mediante operadores de borde locales que sean combinaciones lineales de las derivadas normales al borde. El operador diferencial  $A$  y los operadores de borde deben, además, definir un sistema elíptico para el cual se satisfaga la condición de Agmon. Por otra parte, los coeficientes del operador  $A$  deben pertenecer a la clase  $\mathcal{C}^\infty(M)$  de funciones infinitamente derivables sobre la variedad. Sobre esto último, cabe señalar que no existe información suficiente acerca de la validez de (2.46) en el caso de operadores diferenciales con coeficientes singulares. Un estudio sobre este tema ha sido abordado en el trabajo de Tesis [73], donde se considera la estructura de polos de la función  $\zeta_A(s)$  de un operador diferencial  $A$  con coeficientes *singulares* definidos sobre una variedad con borde.

Por otro lado, la energía de vacío en la regularización exponencial se define como

$$E_{exp} := \frac{\mu}{2} \sum_n \frac{\lambda_n^{1/2}}{\mu} e^{-t \frac{\lambda_n^{1/2}}{\mu}} \Big|_{t=0} = - \frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} \left( h(t, \frac{D_B^{1/2}}{\mu}) \right) \Big|_{t=0} \quad (2.50)$$

donde

$$h(t, \frac{D_B^{1/2}}{\mu}) := Tr \left( e^{-\frac{D_B^{1/2}}{\mu}} \right) = \sum_n e^{-t \frac{\lambda_n^{1/2}}{\mu}} \quad (2.51)$$

es la función espectral conocida como *traza del heat-kernel*<sup>4</sup>. Aquí de nuevo se introduce un parámetro  $\mu$  con dimensiones de masa para asegurar que el argumento de la exponencial sea adimensional.

Se puede demostrar que la derivada de  $h(t, \frac{1}{\mu} D_B^{1/2})$  en (2.50) tiene el siguiente desarrollo asintótico [67]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} h(t, \frac{1}{\mu} D_B^{1/2}) &= \sum_{k=0}^d (-k) \frac{1}{2\mu} \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} a_{d-k} \left(\frac{t}{2\mu}\right)^{-k-1} + \\ &\sum_{k=1}^K (-k) \frac{1}{2\mu} \frac{\Gamma(-k + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} 2 a_{d+2k} \left(\frac{t}{2\mu}\right)^{2k-1} + \\ &\sum_{k=0}^K \frac{(2k+1)(-1)^k}{2\mu \Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(k+1)} \left(\frac{t}{2\mu}\right)^{2k} [r_{d+2k+1}(-k - \frac{1}{2}) + a_{d+2k+1}(\Psi(1) + \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{k-l}) + \\ &\sum_{j=0}^{d+2k} \frac{2a_j}{j-d-2k-1} + 2 a_{d+2k+1}((2k+1) \ln(\frac{t}{2\mu}) - \frac{1}{2k+1})] + \rho_k(t), \end{aligned} \quad (2.53)$$

donde  $a_j$  y  $r_j(k)$  son las mismas que en (2.49) y el resto  $\rho_k(t)$  es  $O((\frac{t}{2\mu})^{2K+1+\epsilon})$ , con  $0 < \epsilon < 1$  para  $t \rightarrow 0$ .

De la expresión (2.53) se ve que el desarrollo asintótico para  $t \rightarrow 0^+$  contiene términos singulares que se presentan como potencias negativas y logaritmos de  $t$ .

Ahora comparemos las energías de vacío de nuestro ejemplo, definidas en las regularizaciones (2.45) y (2.50), evaluando los correspondientes desarrollos asintóticos

---

<sup>4</sup>Hay una cercana relación entre la función zeta de un operador positivo definido y la traza de su heat kernel: ambas están relacionadas por una transformada de Mellin,

$$\zeta(s, A) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dz \sum_k e^{-\lambda_k z} z^{s-1} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dz h(z, A) z^{s-1}. \quad (2.52)$$

en los valores requeridos de los parámetros ( $s = -1$  en (2.45) y  $t = 0$  en (2.50)):

$$E_{exp} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^d (-k) \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{2^{-k} \Gamma(\frac{1}{2})} a_{d-k} \left(\frac{t}{\mu}\right)^{-k-1} \Bigg|_{t=0} - \frac{1}{4\Gamma(\frac{1}{2})} \left[ r_{d+1}\left(\frac{-1}{2}\right) + a_{d+1}(\Psi(1) - 2) + 2 \sum_{j=0}^d \frac{a_j}{j-d-1} \right] + \frac{a_{d+1}}{2\Gamma(\frac{1}{2})} \ln\left(\frac{t}{2\mu}\right), \quad (2.54)$$

mientras que

$$E_{\zeta} = \frac{1}{2\Gamma(-\frac{1}{2})} \sum_{j=0}^d \frac{2 a_j}{j-d-1} + \frac{r_{d+1}(-\frac{1}{2})}{2\Gamma(-\frac{1}{2})} + \frac{\mu^{s+1} a_{d+1}}{\Gamma(\frac{s}{2}) (s+1)} \Bigg|_{s=-1} = \frac{-1}{2\Gamma(\frac{1}{2})} \sum_{j=0}^d \frac{a_j}{j-d-1} + \frac{1}{4\Gamma(\frac{1}{2})} r_{d+1}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{a_{d+1}}{2\Gamma(\frac{1}{2})} \left[ \frac{\Psi(1)}{2} + 1 - \ln(2\mu) - \frac{1}{(s+1)} \right] \Bigg|_{s=-1}. \quad (2.55)$$

Como se ve de (2.54) y (2.55), ambos métodos separan partes divergentes de las partes finitas.

En particular, si el coeficiente  $a_{d+1}$  es nulo, la regularización  $\zeta$  da sólo un resultado finito que coincide con la parte finita de la regularización exponencial. Sin embargo, la regularización exponencial presenta polos de orden  $2, 3, 4, \dots, d+1$ <sup>5</sup>.

Si  $a_{d+1} \neq 0$ , la regularización exponencial muestra además una divergencia logarítmica. También aparece en este caso una diferencia entre las partes finitas de ambas regularizaciones, asociada a la arbitrariedad en la elección del parámetro  $\mu$ , dada por  $-\frac{1}{2} \frac{a_{d+1}}{\sqrt{\pi}} \Psi(1) = \frac{1}{2} \frac{a_{d+1}}{\sqrt{\pi}} \gamma$ , donde  $\gamma$  es la constante de Euler.

Cabe señalar que, en ambos casos ( $a_{d+1} = 0$  ó  $a_{d+1} \neq 0$ ), se podrá dar una interpretación físicamente consistente a los resultados si la diferencia entre ambas regularizaciones se reduce a términos *renormalizables*, es decir, términos que puedan ser compensados con una redefinición de los parámetros que aparecen en la expresión de la energía clásica del sistema<sup>6</sup>.

El procedimiento de renormalización y las condiciones de normalización que permiten fijar los parámetros fenomenológicos se discuten en la siguiente sección.

<sup>5</sup>De hecho, esto es lo que ocurrió en el ejemplo de la sección anterior para el campo escalar sin masa con condiciones de contorno tipo Dirichlet (comparar (2.36) con (2.41)).

<sup>6</sup>Esto es lo que efectivamente ocurrió en el ejemplo del campo escalar, ver (2.42).



## 2.4. Renormalización y condición de normalización

Para llevar a cabo el procedimiento de renormalización, necesitamos una cantidad a ser renormalizada. En la Teoría Cuántica de Campos perturbativa, son las constantes desnudas (masas, acoplamientos, etc) las que son renormalizadas por la introducción de contratérminos, un procedimiento bien conocido. En el caso de la energía de vacío, así como para otros valores medios de vacío, las cantidades correspondientes son los campos de background clásicos (de los que dependen los valores medios de vacío).

El ejemplo más simple a considerar es el de la teoría de un campo escalar con un campo de background clásico  $\Phi(x)$  y un campo cuántico  $\varphi(x)$ , descrito por la acción

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \Phi(x) [\square + M^2 + \lambda \Phi^2(x)] \Phi(x) + \varphi(x) [\square + m^2 + \lambda' \Phi^2(x)] \varphi(x) \quad (2.56)$$

donde  $V(x) = \lambda' \Phi^2(x)$  es el potencial de background con el que está acoplado el campo cuántico.  $M$  y  $\lambda$  son la masa y constante de acoplamiento desnudas, a ser renormalizadas.

Hay una energía clásica asociada con el campo de background

$$E^{clas} = \frac{1}{2} \int d^3x [(\nabla \Phi(x))^2 + M^2 \Phi^2(x) + \lambda \Phi^4(x)] \quad (2.57)$$

(donde suponemos que el background es estático).

La energía del estado fundamental del campo cuántico,  $E_0$ , está dada, por ejemplo, por (2.48) en la regularización  $\zeta$ . Entonces, debe considerarse la energía completa del sistema como un todo, que es la suma

$$E = E^{clas} + E_0. \quad (2.58)$$

Su diferencia para dos situaciones distintas es lo que será medible.

El procedimiento de renormalización consiste básicamente en sustraer la parte divergente de la energía de vacío,  $E_0^{div}$ , separando de la energía clásica una parte divergente igual pero de signo contrario,

$$E = (\mathcal{E}^{clas} - E_0^{div}) + (\mathcal{E}_0^{ren} + E_0^{div}) = \mathcal{E}^{clas} + \mathcal{E}_0^{ren}, \quad (2.59)$$

de modo que ambos términos en el miembro de la derecha resulten finitos. Desde luego que la sustracción de una parte divergente deja atrás una parte finita arbitraria (de la misma forma que la sustraída), lo que debe ser interpretado en términos de constantes fenomenológicas cuyo valor la teoría no es capaz de predecir. De ese modo, el cambio de  $E^{clas}$  por  $\mathcal{E}^{clas}$  puede ser interpretado como una *renormalización* de los parámetros del sistema clásico (aquí  $M$  y  $\lambda$ ), redefinidos de ese modo para

que compensen los términos divergentes que aparecen en el cálculo de las primeras correcciones cuánticas, dejando valores finitos de cierta forma funcional a ser determinados por la experiencia.

Cabe destacar que es muy importante la interpretación que podamos dar a los valores medios de vacío. En general ellos deben entenderse como una corrección cuántica al sistema clásico, descrito en el caso de arriba por el campo  $\Phi(x)$ . Este sistema debe tener su propia dinámica, a partir de la cual se puedan determinar sus características tales como  $M$  y  $\lambda$ , las que reciben contribuciones de las correcciones cuánticas al sistema. Luego surge la pregunta de cómo dar un significado único a los valores de expectación de vacío.

Como se vio en la sección anterior, se desliza cierta arbitrariedad cuando se introduce una regularización. Esto significa que en general existe una contribución a la parte finita de la energía de vacío regularizada que tiene la misma forma funcional que la parte divergente  $E_0^{div}$  sustraída, y que depende de la regularización adoptada. Luego se debe fijar alguna *condición de normalización* sobre esta parte finita  $\mathcal{E}_0^{ren}$  de manera que ella tenga un significado único.

Para valores de expectación de vacío visualizados como correcciones cuánticas al sistema clásico, hay una condición de normalización natural para campos con masa: se puede requerir que en el límite de grandes masas del campo cuántico, las correcciones cuánticas a la energía del vacío se anulen,

$$\mathcal{E}_0^{ren} \rightarrow 0, \text{ cuando } m \rightarrow \infty. \quad (2.60)$$

Esa condición es natural porque se puede argumentar que un campo masivo en el límite de masa  $m \rightarrow \infty$  no debería tener fluctuaciones cuánticas. Desde un punto de vista técnico esto remueve la arbitrariedad del procedimiento de renormalización.

Sin embargo, no hay una condición de normalización general para la energía de vacío de los campos sin masa.

De lo dicho arriba se ve que surgirán problemas en el estudio de la energía de vacío del campo electromagnético en presencia de medios dieléctricos: por un lado, como el campo relevante es no-masivo, no hay en principio una condición de normalización natural que haga única a la parte finita de la energía de vacío regularizada. Por otro lado, en cálculos con medios dieléctricos no dispersivos sucede que, en general, los resultados obtenidos para la parte divergente no son expresables en términos de funciones simples, de modo que los contratérminos necesarios para la renormalización son extremadamente complicados, y luego la interpretación del modelo clásico asociado es poco clara.

En otras palabras, en cálculos de energías de Casimir para el campo electromagnético en presencia de medios dieléctricos no dispersivos la existencia de divergencias ultravioletas dificulta la interpretación física de la parte finita de la energía de vacío.

Nuestra propuesta en ese sentido se basa en la suposición de que estos inconvenientes pueden tener su origen en que los modelos usados habitualmente para

describir los medios dieléctricos no incorporan una relación de dispersión realista  $\epsilon(\omega)$ , dependiente de la frecuencia del campo. Esto lleva a un comportamiento ultravioleta inadecuado que se refleja en  $E_0$  por la aparición de términos divergentes que impiden extraer de manera clara valores físicamente bien definidos para la parte finita de la energía de Casimir.

Por ese motivo, aquí analizaremos la energía de Casimir en el caso donde los dieléctricos se describen usando modelos realistas para la permitividad.

En la sección siguiente analizaremos las propiedades generales de un medio dispersivo. Veremos que el solo hecho de que exista una *relación causal*, no local en el tiempo, entre el vector desplazamiento  $\vec{D}(\vec{x}, t)$  y el campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{x}, t)$  permite deducir el comportamiento de la permitividad  $\epsilon(\omega)$  como función de la frecuencia del campo. Los resultados que se obtienen de este tipo de análisis general están en completo acuerdo con los datos experimentales que se poseen, por ejemplo, para el índice de refracción y el coeficiente de absorción de varios medios [34]. En particular, en el límite de altas frecuencias el análisis nos conduce al modelo de Drude, que será usado en cálculos de los capítulos posteriores. Es en este sentido que hablamos aquí de modelos *realistas*.

## 2.5. Características de la dispersión en medios reales

La dispersión en un medio general se produce cuando la permeabilidad y la permitividad se hacen dependientes de la frecuencia. En ausencia de dispersión, la propagación de un tren de ondas tiene lugar sin distorsión. Sin embargo, todos los medios reales presentan alguna dispersión, lo cual hace que cada componente en frecuencia de una onda incidente adquiera una velocidad de fase distinta. Luego, las diferentes componentes de la onda viajan a velocidades diferentes y la onda se distorsiona. La forma específica de esta distorsión depende de la manera en que cada medio responde a un onda electromagnética incidente, de acuerdo con la dependencia particular de la frecuencia de sus características tales como permeabilidad magnética y permitividad eléctrica.

Las propiedades *generales* de un medio dispersivo se pueden obtener como una consecuencia directa de la condición de causalidad, que establece una relación no local en el tiempo entre el vector desplazamiento  $\vec{D}(\vec{x}, t)$  y el campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{x}, t)$ . De allí, y más allá de cualquier modelo específico, es sencillo deducir el comportamiento de, por ejemplo, la permitividad  $\epsilon(\omega)$  (para un medio no magnético) para grandes frecuencias. Como veremos esto nos conduce al modelo de Drude.

De todas maneras, comenzaremos revisando brevemente las propiedades de la permitividad obtenida en el marco de un modelo clásico [34]. Este modelo es muy usado en física del estado sólido y sus resultados son, por supuesto, consistentes con el comportamiento general deducido de la relación causal entre  $\vec{D}(\vec{x}, t)$  y  $\vec{E}(\vec{x}, t)$ .

De aquí obtendremos las expresiones que serán usadas en los cálculos de los capítulos posteriores.

### 2.5.1. Modelo sencillo de dispersión

Casi toda la física de la dispersión utiliza un modelo clásico donde se considera la ecuación de movimiento para un electrón ligado mediante una fuerza de naturaleza armónica, sobre el que actúa un campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{x}, t)$ :

$$m \left( \ddot{\vec{x}} + \gamma \dot{\vec{x}} + \omega_0^2 \vec{x} \right) = e \vec{E}(\vec{x}, t). \quad (2.61)$$

Aquí, por simplicidad, se ha despreciado la diferencia entre el campo eléctrico aplicado y el campo local, la permeabilidad relativa  $\mu$  se ha tomado igual a 1, y  $\gamma$  corresponde a una fuerza amortiguadora fenomenológica. En (2.61), se han despreciado efectos de naturaleza magnética.

Haciendo la suposición adicional de que la amplitud de oscilación es lo suficientemente pequeña como para que el campo  $\vec{E}$  pueda ser evaluado en la posición media del electrón, y si el campo varía armónicamente con el tiempo, se tiene que el momento dipolar con que contribuye cada electrón es

$$\vec{p} = e \vec{x} = \frac{e^2}{m} (\omega_0^2 - \omega^2 - i \omega \gamma)^{-1} \vec{E}. \quad (2.62)$$

Suponiendo que en el medio hay  $N$  moléculas por unidad de volumen, con  $Z$  electrones por molécula y que, en lugar de una sola frecuencia de resonancia hay varias, de modo que haya  $f_j$  electrones con frecuencia de enlace  $\omega_j$  y con constante de amortiguamiento  $\gamma_j$ , se puede escribir

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left[ 1 + \frac{N e^2}{\epsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j}{(\omega_j^2 - \omega^2 - i \gamma_j \omega)} \right] \equiv n^2, \quad (2.63)$$

donde  $n = \sqrt{\epsilon(\omega)}$  es el índice de refracción, y las "intensidades de oscilador"  $f_j$  satisfacen  $\sum_j f_j = Z$ .

La ecuación (2.63), aunque deducida a partir de un modelo clásico, resulta una descripción exacta de la contribución atómica a la constante dieléctrica una vez que se reemplazan en ella valores mecanocuánticos adecuados para  $f_j$ ,  $\gamma_j$  y  $\omega_j$ .

Las constantes de amortiguamiento  $\gamma_j$  en general son pequeñas comparadas con las frecuencias de enlace  $\omega_j$ . Esto significa que  $\epsilon(\omega)$  es aproximadamente real, salvo cuando  $\omega$  está cerca de  $\omega_j$ . Sin embargo, desempeñan un papel importante en la descripción de la disipación de la energía de la onda incidente en el medio, disipación que está directamente ligada a los conductores. Ampliaremos aquí un poco más sobre esto, ya que será utilizado en la discusión de la sección 3.4.

En efecto, la atenuación de una onda plana se puede expresar en términos de la parte real y la parte imaginaria del número de ondas  $k = \omega/v = \omega \sqrt{\epsilon(\omega)}$ , escribiendo

$$k = \beta + i \frac{\alpha}{2}. \quad (2.64)$$

El parámetro  $\alpha$  se conoce como constante de atenuación o coeficiente de absorción. La intensidad de la onda decae como  $e^{-\alpha x}$ . En (2.64), la relación entre  $(\alpha, \beta)$  y  $(\Re(\epsilon), \Im(\epsilon))$  es

$$\beta^2 - \frac{\alpha^2}{4} = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\Re(\epsilon)}{\epsilon_0}; \quad \beta \alpha = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\Im(\epsilon)}{\epsilon_0}, \quad (2.65)$$

de donde se puede obtener la constante de atenuación

$$\alpha = \frac{\Im(\epsilon(\omega))}{\Re(\epsilon(\omega))} \beta, \quad (2.66)$$

siendo  $\beta = \sqrt{\Re(\epsilon(\omega))/\epsilon_0} \frac{\omega}{c}$ . Notar que las dos relaciones anteriores son válidas para cualquier forma funcional de  $\epsilon(\omega)$ .

De (2.66) vemos que la existencia de una parte imaginaria en  $\epsilon(\omega)$  representa una disipación de la energía de la onda electromagnética en el medio. Por otro lado, en la expresión dada en (2.63), es sencillo ver que la existencia de la parte imaginaria de  $\epsilon(\omega)$  está determinada en principio por la no nulidad de las constantes de amortiguamiento  $\gamma_j$ . Esto se verá con mayor claridad en los límites de la ecuación (2.63) para bajas y altas frecuencias, que tomaremos a continuación. Usaremos este resultado en la discusión de la sección 3.4.

### Comportamiento a bajas frecuencias

En el límite de bajas frecuencias existe una diferencia cualitativa en la respuesta del medio según que la frecuencia resonante más baja sea cero o no. Para un aislante, dicha frecuencia,  $\omega_0$ , es diferente de cero. Luego,

$$\epsilon(\omega) \rightarrow \epsilon_0 \left( 1 + \frac{N e^2}{\epsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2} \right) \quad \text{para } \omega \rightarrow 0, \quad (2.67)$$

que es real e independiente de  $\omega$ . Este es el modelo que usaremos para describir la respuesta de un medio a bajas frecuencias.

Por otro lado, para un conductor, cierta fracción de los electrones son *libres* en el sentido de que tienen  $\omega_0 = 0$ <sup>7</sup>. Presentando por separado la contribución de los

---

<sup>7</sup>En realidad, el problema de la conductividad eléctrica debe ser tratado con los métodos de la Mecánica Estadística Cuántica, ya que el principio de exclusión de Pauli desempeña allí un papel fundamental. La teoría que describe un conductor es la teoría de bandas. Sin embargo, en un rango considerable de frecuencias, los datos experimentales para la conductividad responden al resultado simple que proporciona (2.68) [34]. De cualquier manera, nuestro objetivo aquí solamente es señalar que las constantes  $\gamma_j$  deben ser no nulas para describir un medio conductor con este modelo clásico, lo cual será usado posteriormente.

electrones libres y tomando el límite de bajas frecuencias, tenemos

$$\epsilon(\omega) \rightarrow \epsilon_{resto} + i \frac{N e^2 f_0}{m \omega (\gamma_0 - i \omega)} \quad \text{para } \omega \rightarrow 0, \quad (2.68)$$

donde  $\epsilon_{resto}$  es la contribución de todos los otros dipolos (una expresión similar a (2.67) con  $j \neq 0$ ), que es real.

De las ecuaciones de Maxwell se puede ver que la conductividad del medio se puede describir mediante la parte imaginaria de la permitividad  $\epsilon(\omega)$  [34], que en este modelo está contenida el segundo término del lado derecho de (2.68) en el límite de bajas frecuencias. La parte imaginaria de este término es proporcional a  $\gamma_0$ , de lo cual vemos que, efectivamente, debe ser  $\gamma_0 \neq 0$  para dar cuenta de la conductividad del medio. Volveremos a encontrar esta situación en el límite de altas frecuencias.

### Comportamiento a altas frecuencias. Modelo de Drude

A frecuencias más altas que la mayor de las frecuencias de resonancia, la constante dieléctrica toma la forma

$$\epsilon(\omega) \rightarrow \epsilon_0 \left( 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right) \quad \text{para } \omega \rightarrow \infty, \quad (2.69)$$

donde  $\Omega^2 = \frac{N Z e^2}{\epsilon_0 m}$ .

La expresión (2.69) se llama modelo de Drude, que es el modelo que usaremos para describir la respuesta de un medio dieléctrico a altas frecuencias. La constante  $\Omega$ , que depende únicamente del número total de electrones por unidad de volumen,  $N Z$ , es la *frecuencia de plasma* del medio. Por ejemplo, para el agua en condiciones normales de temperatura y presión,  $\Omega \simeq 3,3 \times 10^{16} \text{ Hz}$  ( $\hbar \Omega \simeq 21,0 \text{ eV}$ ). En los medios dieléctricos, (2.69) sólo se aplica cuando  $\omega^2 \gg \Omega^2$ .

Si retenemos un orden más en el desarrollo de (2.63) para  $\omega$  grande, hallamos una expresión válida para describir la conductividad del medio a altas frecuencias,

$$\epsilon(\omega) \simeq \epsilon_0 \left( 1 - \frac{\Omega^2}{\omega (\omega + i \gamma)} \right), \quad (2.70)$$

donde hemos aproximado  $\gamma_j = \gamma$  para todo valor de  $j$ . Este modelo, a veces llamado modelo de Drude para metales reales, será usado en la sección 3.4. Como discutimos antes, la conductividad está presente cuando  $\gamma$  es no nulo. Para una discusión detallada de la relación entre la conductividad y las constantes de amortiguamiento, ver por ejemplo [104]

### 2.5.2. Causalidad en la relación entre el campo eléctrico y el vector desplazamiento. Comportamiento general de la permitividad.

Para que los resultados de los capítulos que siguen revistan validez, es necesario mostrar que los modelos usados para describir la respuesta del medio dieléctrico

con la frecuencia son de carácter general y no están limitados a las consideraciones clásicas que hemos usado en la sección anterior para derivar la expresión de la permitividad.

En esta sección mostraremos que, independientemente del modelo particular para  $\epsilon(\omega)$ , el hecho de que la permitividad dependa de la frecuencia hace que exista una relación no local en el tiempo entre el vector desplazamiento  $\vec{D}(\vec{x}, t)$  y el campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{x}, t)$ . Es de esta relación causal que se pueden deducir propiedades generales para  $\epsilon(\omega)$  que, como veremos, están de acuerdo con las expresiones antes derivadas a partir de un modelo clásico.

Si las componentes monocromáticas de frecuencia  $\omega$  de los campos  $\vec{D}$  y  $\vec{E}$  están relacionadas linealmente por

$$\vec{D}(\vec{x}, \omega) = \epsilon(\omega) \vec{E}(\vec{x}, \omega), \quad (2.71)$$

la dependencia con el tiempo se puede reconstruir mediante la transformación de Fourier. Tratando como un parámetro fijo a la coordenada espacial, se pueden escribir las integrales de Fourier en los dominios del tiempo y de la frecuencia como

$$\vec{D}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{D}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.72)$$

y

$$\vec{D}(\vec{x}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{D}(\vec{x}, t') e^{i\omega t'} dt'. \quad (2.73)$$

Para  $\vec{E}$  podemos escribir expresiones análogas. Sustituyendo  $\vec{D}(\vec{x}, \omega)$  mediante (2.71), tenemos

$$\vec{D}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(\omega) \vec{E}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (2.74)$$

Introduciendo la representación de Fourier de  $\vec{E}(\vec{x}, \omega)$  en la última integral, obtenemos

$$\vec{D}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \epsilon(\omega) e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \vec{E}(\vec{x}, t') e^{i\omega t'}. \quad (2.75)$$

Bajo la hipótesis de que podemos intercambiar el orden de integración, se puede escribir

$$\vec{D}(\vec{x}, t) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{x}, t) + \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) \vec{E}(\vec{x}, t - \tau) d\tau, \quad (2.76)$$

donde  $G(\tau)$  es la transformada de Fourier de la susceptibilidad  $\epsilon_0 \chi_e(\omega) = \epsilon(\omega) - \epsilon_0$ :

$$G(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\epsilon(\omega) - \epsilon_0] e^{-i\omega \tau} d\omega. \quad (2.77)$$

Las ecuaciones (2.76) y (2.77) dan una relación no local entre  $\vec{D}$  y  $\vec{E}$ , en la que  $\vec{D}$  en el instante  $t$  depende del campo eléctrico en instantes distintos de  $t$ . Si  $\epsilon(\omega)$  es independiente de  $\omega$  para cualquier  $\omega$ , la ecuación (2.77) conduce a que  $G(\tau) \propto \delta(\tau)$  y se obtiene una relación instantánea, pero si  $\epsilon(\omega)$  varía con  $\omega$ ,  $G(\tau)$  ya no se anula para valores de  $\tau$  distintos de cero.

Para ilustrar el carácter de la relación que implican (2.76) y (2.77), consideremos una variante del índice de refracción (2.63) que contenga una sola frecuencia de resonancia,

$$\epsilon(\omega) - \epsilon_0 = \epsilon_0 \Omega^2 (\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)^{-1}. \quad (2.78)$$

En este modelo, la transformada  $G(\tau)$  de la susceptibilidad es

$$G(\tau) = \frac{\epsilon_0 \Omega^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} d\omega. \quad (2.79)$$

La integral se puede evaluar en el plano complejo, considerando que el integrando tiene polos en el semiplano inferior, en los puntos  $\omega_{\pm} = -i\gamma/2 \pm \nu_0$ , donde  $\nu_0^2 = \omega_0^2 - \gamma^2/4$ . Para  $\tau < 0$ , se puede cerrar el contorno de integración por el semiplano superior sin afectar el valor de la integral. Como el integrando es analítico dentro de ese contorno, la integral es nula. Pero para  $\tau > 0$  el contorno debe cerrarse por el semiplano inferior y la integral resulta igual a  $-2\pi i$  veces la suma de los residuos del integrando en los dos polos. Luego la función  $G(\tau)$  es

$$G(\tau) = \epsilon_0 \Omega^2 e^{-\gamma\tau/2} \frac{\sin(\nu_0\tau)}{\nu_0} \theta(\tau), \quad (2.80)$$

donde  $\theta(\tau)$  es la función escalón. Para la constante dieléctrica (2.63) la función  $G(\tau)$  es justamente la superposición lineal de términos como los de (2.80). La no localidad en el tiempo de la relación entre  $\vec{D}$  y  $\vec{E}$  está luego limitada a tiempos del orden de  $\gamma^{-1}$ .

El aspecto más obvio y fundamental del núcleo (2.80) es que se anula para  $\tau < 0$ . Esto significa que en el instante  $t$  sólo los valores del campo eléctrico anteriores a dicho instante entran en juego en la determinación del desplazamiento, en acuerdo con nuestras ideas fundamentales acerca de la causalidad en los fenómenos físicos. Por lo tanto, la ecuación (2.76) se puede escribir

$$\vec{D}(\vec{x}, t) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{x}, t) + \int_0^{\infty} G(\tau) \vec{E}(\vec{x}, t - \tau) d\tau. \quad (2.81)$$

Esta es la relación causal, lineal y espacialmente local más general que puede escribirse entre  $\vec{D}$  y  $\vec{E}$  en un medio isótropo y uniforme. Su validez va más allá de cualquier modelo específico para  $\epsilon(\omega)$ .

A partir de (2.77), se puede expresar la constante dieléctrica en función de  $G(\tau)$  como

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 + \int_0^{\infty} G(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (2.82)$$



Esta relación tiene varias consecuencias interesantes: A partir de que en (2.81)  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$  son reales, y por consiguiente también lo es  $G(\tau)$ , se puede deducir de (2.82) que cuando  $\omega$  sea compleja

$$\epsilon(-\omega) = \epsilon^*(\omega^*). \quad (2.83)$$

Además, si se considera (2.82) como una representación de  $\epsilon(\omega)$  en el plano complejo  $\omega$ , esto muestra que  $\epsilon(\omega)$  es una función analítica de  $\omega$  en el semiplano superior, suponiendo que  $G(\tau)$  es finita para todo  $\tau$ . Para  $\omega$  sobre el eje real es necesario imponer además el requisito de que  $G(\tau) \rightarrow 0$  cuando  $\tau \rightarrow \infty$  para asegurar que  $\epsilon(\omega)$  también allí sea analítica. Esto es cierto para los dieléctricos, aunque no para los conductores en los que  $G(\tau) \rightarrow \sigma$  cuando  $\tau \rightarrow \infty$  y  $\epsilon(\omega)$  tiene un polo simple en  $\omega = 0$  (ver sección anterior). Entonces, salvo un posible polo en  $\omega = 0$ , la constante dieléctrica  $\epsilon(\omega)$  es analítica para  $\Im(\omega) \geq 0$  como un resultado directo de la relación causal entre  $\vec{D}$  y  $\vec{E}$ .

Esas propiedades pueden verificarse efectivamente en los modelos discutidos en la sección anterior.

El comportamiento de  $\epsilon(\omega) - \epsilon_0$  para valores grandes de  $\omega$  puede ser relacionado con el comportamiento de  $G(\tau)$  en las proximidades de  $\tau = 0$ . En efecto, un desarrollo en serie de Taylor de  $G$  en (2.82) nos conduce al desarrollo asintótico

$$\epsilon(\omega) - \epsilon_0 = i \frac{G(0)}{\omega} - \frac{G'(0)}{\omega^2} + \dots \quad (2.84)$$

donde tanto  $G$  como sus derivadas están evaluadas en  $\tau = 0^+$ . Si  $G(0^+) = 0$  como en (2.80), el primer término de la serie está ausente, con lo cual  $\epsilon(\omega) - \epsilon_0$  decae a altas frecuencias como  $\omega^{-2}$ , justamente como se halló para el modelo de Drude, ecuación (2.69).

De hecho, el desarrollo asintótico muestra que las partes real e imaginaria de  $\epsilon(\omega) - \epsilon_0$  se comportan para valores reales y grandes de  $\omega$  como

$$\Re[\epsilon(\omega) - \epsilon_0] = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^2}\right); \quad \Im[\epsilon(\omega)] = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^3}\right), \quad (2.85)$$

en completo acuerdo con el comportamiento de las partes real e imaginaria de (2.70).



## Capítulo 3

# Divergencias en la energía de Casimir de un medio dieléctrico con comportamiento ultravioleta realista

En este capítulo consideramos un medio dieléctrico dispersivo, con un comportamiento ultravioleta extraído del modelo de Drude. Como hemos discutido en la sección 2.5, el modelo es *realista* en el sentido de que sus propiedades generales pueden ser obtenidas como una consecuencia directa de la relación causal que existe entre el vector desplazamiento y el campo eléctrico. Por otro lado, comparado con los modelos diluidos (permitividades próximas de la del vacío pero constantes como función de la frecuencia), tiene la ventaja de que para grandes frecuencias dos medios diferentes se comportan de la misma manera. En efecto, como resultado mostraremos aquí que la energía de Casimir presenta divergencias más *suaves* que las arrojadas usando aproximaciones de medios diluidos: la energía de Casimir de una esfera dieléctrica contiene sólo un término divergente proporcional al volumen, que puede ser cancelado por renormalización introduciendo un contratérmino de volumen análogo al usado en modelos de la bolsa. Mostraremos además que este comportamiento se mantiene aún en un caso más general, donde el medio también presenta conductividad.

### 3.1. Introducción

Como se mencionó al final del capítulo 2, cuando se trabaja con medios dieléctricos no dispersivos la presencia de divergencias ultravioletas dificulta la interpretación física de la energía de vacío. Esto tiene su origen, por un lado, en el hecho de que el campo electromagnético es no-masivo y entonces no hay una condición de normalización *natural* que determine unívocamente la parte finita de la energía de vacío

renormalizada. Por otro lado, los resultados obtenidos para la parte divergente no son expresables en términos de funciones simples, de modo que los contratérminos que serían necesarios para la renormalización son extremadamente complicados, y entonces la interpretación del modelo clásico asociado es poco clara.

Nuestra propuesta en este sentido se basa en la suposición de que esta situación problemática tiene su origen en el hecho de que los modelos usados habitualmente al describir los medios dieléctricos no incorporan, en su mayoría, una relación de dispersión  $\epsilon(\omega)$  (dependiente de la frecuencia del campo) realista. Esto lleva a un comportamiento ultravioleta inadecuado en la energía  $E_0$  y de ahí la aparición de divergencias de las cuales no es posible extraer una parte finita de la energía de Casimir con un sentido físico bien determinado.

Por esas razones, parece natural analizar las divergencias ultravioletas del Efecto Casimir en un modelo de dieléctrico que tiene una relación de dispersión con rasgos realistas, al menos en el rango de altas frecuencias<sup>1</sup>. Como veremos, la estructura de singularidades para un modelo con simetría esférica en el marco de la regularización  $\zeta$  es muy simple: existe sólo un polo, con un residuo proporcional al volumen, que resulta completamente análogo al término absorbido en la energía clásica en el modelo de la bolsa [60, 61, 62, 63]. En esas condiciones, basta con la introducción de un único contratérmino, con el sentido de una densidad de energía, para obtener una energía de Casimir finita.

No hay una manera intrínseca en Teoría Cuántica de Campos para fijar la parte finita de este contratérmino, que entonces queda expresado en términos de una constante fenomenológica. En principio, como en los modelos de la bolsa, esta constante debe ser fijada por el experimento. Pero dada la estructura simple del contratérmino necesario, consideramos que este resultado es un paso importante para el entendimiento de la energía de Casimir en medios dieléctricos reales.

En la siguiente sección analizaremos la energía de Casimir de un medio dieléctrico esférico cuyas propiedades se modelan mediante una permitividad cuya forma funcional se deriva del modelo de Drude en la aproximación de altas frecuencias (ver sección 2.5.1). La energía de Casimir se definirá a través de la función  $\zeta$  del modelo. En la sección 3.3 hallaremos sus singularidades y mostraremos que, gracias a cancelaciones que ocurren entre las contribuciones de los modos *transversal eléctrico* y *transversal magnético*, ellas se reducen a un término proporcional al volumen accesible [75]. También veremos que esta dependencia de los términos singulares con el volumen se mantiene aún en un caso más general, donde el medio se considera como un *metal real*, lo que será discutido en la sección 3.4 mediante un modelo modificado que incluye conductividad. Finalmente en la sección 3.5 daremos un resumen y estableceremos nuestras conclusiones.

---

<sup>1</sup>El efecto de la introducción de una relación de dispersión realista en el rango de bajas frecuencias será estudiado en el capítulo 5

### 3.2. El modelo y su energía de Casimir

Comenzamos esta sección con una descripción del modelo que vamos a analizar. Consideremos una esfera dieléctrica no-magnética ( $\mu = \mu_0$ ) de radio  $a$ , con una permitividad dependiente de la frecuencia dada por

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left( 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right), \quad (3.1)$$

e inmersa en el vacío de permitividad  $\epsilon_0$ . Esta permitividad corresponde al *modelo de Drude* en la aproximación de altas frecuencias, que ya hemos analizado en la sección 2.5.1. El parámetro fenomenológico  $\Omega$  es la llamada *frecuencia de plasma efectiva*. Dado que nos vamos a concentrar en la estructura de singularidades ultravioletas de la energía de Casimir, este modelo válido para altas frecuencias es suficiente para nuestros propósitos.

Como hemos mencionado en el capítulo anterior, la energía de Casimir de esta configuración está definida formalmente como la suma sobre las energías de vacío de cada modo de oscilación del campo electromagnético:

$$E_{Cas}(a) = \sum_n \frac{1}{2} \hbar \omega_n = \frac{\hbar c}{2a} \sum_n z_n, \quad (3.2)$$

donde las cantidades adimensionales  $z_n := a\omega_n/c$  son las autofrecuencias correspondientes a una esfera de radio 1 divididas por la velocidad de la luz,  $c$ . La serie de la ec. (3.2) es divergente, por lo que debemos recurrir a algún mecanismo de regularización. Definiremos apropiadamente la energía de Casimir usando la regularización  $\zeta$ . En este esquema,  $E_{Cas}(a)$  se define mediante la continuación analítica a  $s = -1$  de la función  $\zeta(s)$ ,

$$E_{Cas}(a) := \frac{\hbar c}{2a} \zeta(s)|_{s=-1}, \quad (3.3)$$

la que está definida a partir de las autofrecuencias del campo electromagnético por medio de la serie

$$\zeta(s) = \sum_n z_n^{-s}. \quad (3.4)$$

Esta serie es absoluta y uniformemente convergente para  $\Re(s)$  suficientemente grande, región donde define una función analítica que se extiende al resto del plano complejo  $s$  como una función meromorfa.

En (3.4), las autofrecuencias deben determinarse resolviendo las ecuaciones de Maxwell en dos medios dieléctricos homogéneos, para lo cual buscamos soluciones de la forma  $\vec{E}, \vec{B} \sim \exp(-i\omega t)$ . Esto lleva a las relaciones

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -i\frac{\omega}{c}\mu\epsilon\vec{E}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = i\frac{\omega}{c}\vec{B}, \quad (3.5)$$

donde ambos campos,  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ , tienen divergencia nula en la región de interés. Estas ecuaciones conducen a ecuación de Helmholtz

$$\left( \Delta \vec{E} + \mu \epsilon \frac{\omega^2}{c^2} \right) \vec{E} = 0, \quad (3.6)$$

y una ecuación similar para el campo  $\vec{B}$ .

En (3.6),  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  están sujetos a las condiciones apropiadas en la superficie de separación entre dos medios dieléctricos,

$$E_{\theta,\phi} \Big|_{r=a^+} = E_{\theta,\phi} \Big|_{r=a^-}, \quad \frac{1}{\mu_1} B_{\theta,\phi} \Big|_{r=a^+} = \frac{1}{\mu_2} B_{\theta,\phi} \Big|_{r=a^-}. \quad (3.7)$$

En nuestro caso, pondremos  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ .

Para esas condiciones de contorno, se puede emplear la linealidad del problema para describir a los campos en términos de los modos transversales eléctricos (TE), con el campo eléctrico dado por

$$\vec{E}_{l,m}^{(TE)} = f_l(r) \vec{L} Y_{l,m}(\theta, \phi), \quad (3.8)$$

y los modos transversales magnéticos (TM), donde el campo magnético toma la forma

$$\vec{B}_{l,m}^{(TM)} = g_l(r) \vec{L} Y_{l,m}(\theta, \phi). \quad (3.9)$$

Aquí, el operador  $\vec{L}$  es

$$\vec{L} = -i \vec{r} \times \vec{\nabla} = -i \hat{\varphi} \partial_\theta + i \hat{\theta} \frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi. \quad (3.10)$$

Teniendo en cuenta que

$$\vec{\nabla} \times \vec{L} = \frac{i \hat{r}}{r} \vec{L}^2 + i \hat{\theta} (\partial_r + 1/r) \partial_\theta + i \hat{\varphi} (\partial_r + 1/r) \frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi, \quad (3.11)$$

de (3.8) y (3.5) tenemos para los modos TE

$$\begin{aligned} B_{l,m;r}^{(TE)} &= \frac{c}{\omega r} l(l+1) f_l(r) Y_{l,m}(\theta, \phi), \\ B_{l,m;\theta}^{(TE)} &= \frac{c}{\omega r} \partial_r [r f_l(r)] \partial_\theta Y_{l,m}(\theta, \phi), \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$B_{l,m;\varphi}^{(TE)} = \frac{c}{\omega r} \partial_r [r f_l(r)] \frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi Y_{l,m}(\theta, \phi).$$

De manera similar, de (3.9) y (3.5) resulta para los modos TM

$$\begin{aligned} E_{l,m;r}^{(TM)} &= \frac{-c}{\mu \epsilon \omega r} l(l+1) g_l(r) Y_{l,m}(\theta, \phi), \\ E_{l,m;\theta}^{(TM)} &= \frac{-c}{\mu \epsilon \omega r} \partial_r [r g_l(r)] \partial_\theta Y_{l,m}(\theta, \phi), \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$E_{l,m;\varphi}^{(TM)} = \frac{-c}{\mu \epsilon \omega r} \partial_r [r g_l(r)] \frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi Y_{l,m}(\theta, \phi).$$

Imponiendo las condiciones (3.7) para los modos TE, tenemos

$$\begin{aligned} f_l(r = a^+) &= f_l(r = a^-), \\ \partial_r [r f_l(r)] \Big|_{r=a^+} &= \partial_r [r f_l(r)] \Big|_{r=a^-}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

De manera similar, imponiendo las condiciones (3.7) para los modos TM,

$$\begin{aligned} g_l(r = a^+) &= g_l(r = a^-), \\ \frac{1}{\epsilon_0} \partial_r [r g_l(r)] \Big|_{r=a^+} &= \frac{1}{\epsilon} \partial_r [r g_l(r)] \Big|_{r=a^-}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Dentro de cada dieléctrico, los campos satisfacen ecuaciones de Helmholtz, (3.6). Considerando por ejemplo los modos TE, tenemos para  $f_l(r)$

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} [r f_l(r)] - \frac{l(l+1)}{r^2} f_l(r) = -\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} f_l(r), \text{ para } r \neq a, \quad (3.16)$$

junto con las condiciones de contorno (3.14).

Para trabajar con un espectro discreto, encerraremos al sistema en una gran esfera conductora de radio  $R$ , y tomaremos el límite  $R \rightarrow \infty$  en un paso intermedio adecuado en el cálculo. Esto conducirá a una condición de contorno adicional en  $r = R$  para  $f_l(r)$  y para  $g_l(r)$ :

$$f_l(r) \Big|_{r=R} = 0, \quad \partial_r [r g_l(r)] \Big|_{r=R} = 0. \quad (3.17)$$

En el Apéndice C mostraremos que las autofrecuencias de los modos TE están determinadas por los ceros de la función

$$\begin{aligned} \Delta_{l+1/2}^{TE}(a\omega/c) &= \Delta_{l+1/2}^{TE}(z) := \\ &= \mathcal{J}_{l+1/2}(\bar{z}_1) \left\{ \mathcal{Y}_{l+1/2}(\bar{z}_0) \mathcal{J}'_{l+1/2}(\bar{z}_2) - \mathcal{J}_{l+1/2}(\bar{z}_0) \mathcal{Y}'_{l+1/2}(\bar{z}_2) \right\} - \\ &\quad - \xi \mathcal{J}'_{l+1/2}(\bar{z}_1) \left\{ \mathcal{Y}_{l+1/2}(\bar{z}_0) \mathcal{J}_{l+1/2}(\bar{z}_2) - \mathcal{J}_{l+1/2}(\bar{z}_0) \mathcal{Y}_{l+1/2}(\bar{z}_2) \right\}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{l+1/2}(w) &= w j_l(w) = \sqrt{\frac{\pi w}{2}} J_{l+1/2}(w) \\ \mathcal{Y}_{l+1/2}(w) &= w y_l(w) = \sqrt{\frac{\pi w}{2}} Y_{l+1/2}(w) \end{aligned} \quad (3.19)$$

son las funciones de Riccati-Bessel. Aquí hemos introducido la notación  $z = a(\omega/c)$ ,  $\bar{z}_1 = z n(z)$ ,  $\bar{z}_2 = z n_0$ ,  $\bar{z}_0 = z R n_0/a$ ,  $\xi = n(z)/n_0$ ,  $n_0 = \sqrt{\epsilon_0}$  y  $n(z) = \sqrt{\epsilon(\omega)}$ .

Para los modos TM, se puede hacer un análisis similar para la función  $g_l(r)$ . En ese caso, las autofrecuencias vienen dadas por los ceros de

$$\begin{aligned} \Delta_{l+1/2}^{TM}(a\omega/c) &= \Delta_{l+1/2}^{TM}(z) := \\ &= \mathcal{J}_{l+1/2}(\bar{z}_1) \left\{ \mathcal{Y}'_{l+1/2}(\bar{z}_2) \mathcal{J}'_{l+1/2}(\bar{z}_0) - \mathcal{J}'_{l+1/2}(\bar{z}_2) \mathcal{Y}'_{l+1/2}(\bar{z}_0) \right\} - \\ &\quad - \frac{1}{\xi} \mathcal{J}'_{l+1/2}(\bar{z}_1) \left\{ \mathcal{Y}_{l+1/2}(\bar{z}_2) \mathcal{J}'_{l+1/2}(\bar{z}_0) - \mathcal{J}_{l+1/2}(\bar{z}_2) \mathcal{Y}'_{l+1/2}(\bar{z}_0) \right\}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Aquí supondremos que estas funciones tienen en el semiplano abierto derecho de la variable  $z$  ceros reales y simples únicamente, lo que también será demostrado en el Apéndice C.

En lo que sigue consideraremos de manera explícita el cálculo de las singularidades que provienen de los modos TE. El tratamiento para los modos TM es completamente análogo.

Como se mencionó al comienzo de esta sección, la energía de Casimir en el marco de la regularización  $\zeta$ ,  $E_{Cas}$ , está definida en la ecuación (3.3) como la continuación analítica de la función  $\frac{\hbar c}{2a} \zeta(s)$  a  $s = -1$ . Debido a la simetría esférica del problema, la función  $\zeta(s)$  toma la forma

$$\zeta(s) = \sum_{\nu=3/2}^{\infty} 2\nu \sum_n z_{\nu,n}^{-s}, \quad (3.21)$$

donde  $\nu = l + 1/2$ . Para cada valor de  $\nu$ , el índice  $n$  numera los ceros de  $\Delta_{\nu}^{TE}(z)$  en la ecuación (3.18), y la serie converge absoluta y uniformemente para  $\Re(s)$  suficientemente grande. Veremos que la continuación analítica de esta función presenta un polo simple en  $s = -1$ , de modo que  $E_{Cas}$  contiene un término divergente que dependerá de la relación de dispersión particular que se adopte para  $\epsilon(\omega)$  (en nuestro caso definida en (3.1)). El método general utilizado para analizar esta continuación analítica se puede hallar en [76, 77, 78, 79].

Para  $\Re(s)$  suficientemente grande, podemos representar a la función zeta como una integral en el plano complejo de la variable  $z$ . Utilizando el teorema de Cauchy, para los modos TE tenemos

$$\zeta_{\nu}(s) := \sum_{n=1}^{\infty} z_{\nu,n}^{-s} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C z^{-s} \frac{\Delta_{\nu}^{TE'}(z)}{\Delta_{\nu}^{TE}(z)} dz, \quad (3.22)$$

donde la prima indica derivación respecto de  $z$  y la curva  $C$ , recorrida en sentido antihorario, encierra todos los ceros positivos de  $\Delta_{\nu}^{TE}(z)$ . Cabe señalar que esta clase de representación es válida para cualquier relación de dispersión  $\epsilon(\omega)$ .

La curva  $C$  se puede deformar en una línea recta vertical que cruza el eje horizontal en  $\Re(z) = x$ , donde  $x$  es *cualquier* valor dentro del intervalo abierto  $0 < x < z_{\nu,1}$ ,



siendo  $z_{\nu,1}$  el primer cero positivo de  $\Delta_\nu^{TE}(z)$ . Obviamente, la integral (3.22) no dependerá del valor particular de  $x$  en ese rango. En efecto, expresando el integrando en términos de las funciones de Bessel modificadas [69]

$$\begin{aligned} J_\nu(e^{i\frac{\pi}{2}} w) &= e^{i\frac{\pi}{2}\nu} I_\nu(w), \\ Y_\nu(e^{i\frac{\pi}{2}} w) &= e^{i\frac{\pi}{2}(\nu+1)} I_\nu(w) - \frac{2}{\pi} e^{-i\frac{\pi}{2}\nu} K_\nu(w), \\ J'_\nu(e^{i\frac{\pi}{2}} w) &= e^{i\frac{\pi}{2}(\nu-1)} I'_\nu(w), \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$Y'_\nu(e^{i\frac{\pi}{2}} w) = e^{i\frac{\pi}{2}\nu} I'_\nu(w) - \frac{2}{\pi} e^{-i\frac{\pi}{2}(\nu+1)} K'_\nu(w),$$

relaciones válidas para  $-\pi < \arg(w) \leq \pi/2$ , y tomando en consideración su comportamiento asintótico para grandes argumentos, se puede ver que la integral

$$\zeta_\nu(s) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} z^{-s} \frac{\Delta_\nu^{TE'}(z)}{\Delta_\nu^{TE}(z)} dz, \quad (3.24)$$

converge absoluta y uniformemente a una función analítica de  $s$  en el semiplano abierto  $\Re(s) > 1$ . Sin pérdida de generalidad, y por conveniencia de cálculo, evaluaremos esta función para argumentos reales  $s > 1$ , desde donde será extendida como una función meromorfa al resto del plano complejo  $s$ .

Por otro lado, haciendo uso de las propiedades de las funciones de Bessel de argumento complejo [69],

$$\begin{aligned} I_\nu(e^{-i\pi}(y+ix)) &= e^{-i\pi\nu} (I_\nu(y-ix))^*, \\ K_\nu(e^{-i\pi}(y+ix)) &= e^{i\pi\nu} (K_\nu(y-ix))^* + i\pi (I_\nu(y-ix))^*, \\ I'_\nu(e^{-i\pi}(y+ix)) &= e^{-i\pi(\nu-1)} (I'_\nu(y-ix))^*, \\ K'_\nu(e^{-i\pi}(y+ix)) &= e^{i\pi(\nu+1)} (K'_\nu(y-ix))^* + i\pi e^{i\pi} (I'_\nu(y-ix))^*, \end{aligned} \quad (3.25)$$

válidas para  $y > 0$ , la expresión (3.24) se puede reescribir para  $s > 1$  como

$$\zeta_\nu(s) = \frac{-1}{\pi} \Re \left\{ x^{1-s} e^{-i\frac{\pi}{2}s} \int_0^\infty (y-i)^{-s} \frac{\Delta_\nu^{TE'}(ix(y-i))}{\Delta_\nu^{TE}(ix(y-i))} dy \right\}, \quad (3.26)$$

donde la derivada logarítmica es tomada con respecto al argumento  $ix(y-i)$ .

Cambiando la variable de integración a  $t \equiv z(y-i)$ , con  $z = x/\nu > 0$ , finalmente obtenemos

$$\zeta_\nu(s) = \frac{-1}{\pi} \Re \left\{ \nu^{-s} e^{-i\frac{\pi}{2}(s+1)} \int_{-iz}^{\infty-iz} t^{-s} \frac{d(\ln \Delta_\nu^{TE}(it))}{dt} dt \right\}. \quad (3.27)$$

Notar que el lado derecho de (3.27) no depende de  $z$  para  $z (> 0)$  suficientemente pequeño.

Para construir la extensión analítica de la expresión (3.3) a  $s \simeq -1$ , en (3.27) sumamos y restamos los primeros términos del desarrollo asintótico del integrando, obtenido a partir del desarrollo asintótico uniforme de las funciones de Bessel modificadas (desarrollo de Debye) [69] que aparecen en la expresión de  $\Delta_\nu^{TE}(\nu t)$ . Para aislar las singularidades de la energía de Casimir es suficiente retener en el desarrollo términos hasta el orden  $\nu^{-3}$ ,

$$\frac{d(\ln \Delta_\nu^{TE}(\nu t))}{dt} = D_\nu^{TE}(t) + \mathcal{O}(\nu^{-4}), \quad (3.28)$$

donde

$$\begin{aligned} D_\nu^{TE}(t) = \\ = \nu D_{TE}^{(1)}(t) + D_{TE}^{(0)}(t) + \nu^{-1} D_{TE}^{(-1)}(t) + \nu^{-2} D_{TE}^{(-2)}(t) + \nu^{-3} D_{TE}^{(-3)}(t). \end{aligned} \quad (3.29)$$

es un desarrollo válido para grandes valores de  $\nu$  con  $t$  fijo, obtenido empleando el desarrollo de Debye para las funciones de Bessel. Aquí las funciones  $D_{TE}^{(k)}(t)$ ,  $k = 1, 0, \dots, -3$ , son

$$D_{TE}^{(1)}(t) = \frac{1}{t} \sqrt{1 + n_0^2 R^2 t^2 / a^2} \quad (3.30)$$

$$D_{TE}^{(0)}(t) = (2t + 2n_0^2 R^2 t^3 / a^2)^{-1} \quad (3.31)$$

$$D_{TE}^{(-1)}(t) = \frac{n_0^2 R^2 t (1 - n_0^2 R^2 t^2 / 4a^2)}{2a^2 (1 + n_0^2 R^2 t^2 / a^2)^{5/2}} - \frac{(n_0^2 + 2/t^2) Z^2}{2t \sqrt{1 + n_0^2 t^2}} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} D_{TE}^{(-2)}(t) = \frac{a^6 n_0^2 R^2 t}{2(a^2 + n_0^2 R^2 t^2)^4} \left( \frac{5n_0^2 t^2}{2} - \frac{n_0^4 R^4 t^4}{4a^4} - \frac{6n_0^2 R^2 Z^2}{a^2} \right. \\ \left. - \frac{a^2 Z^2}{n_0^2 R^2 t^4} - \frac{4Z^2}{t^2} - \frac{4n_0^4 R^4 t^2 Z^2}{a^4} - \frac{n_0^6 R^6 t^4 Z^2}{a^6} - 1 \right) \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} D_{TE}^{(-3)}(t) = \frac{n_0^2 R^2 t (64a^6 - 560a^4 n_0^2 R^2 t^2 + 456a^2 n_0^4 R^4 t^4 - 25n_0^6 R^6 t^6)}{128a^8 (1 + n_0^2 R^2 t^2 / a^2)^{11/2}} + \\ \frac{Z^2 (16Z^2 + 56n_0^2 t^2 Z^2 + 6n_0^8 t^8 Z^2 + 3n_0^6 t^6 (t^2 + 12Z^2) - 2n_0^2 (t^6 - 35t^4 Z^2))}{16t^5 (1 + n_0^2 t^2)^{7/2}} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Para los modos TM, un desarrollo análogo conduce al desarrollo de Debye

$$D_{TM}^{(1)}(t) = \frac{1}{t} \sqrt{1 + n_0^2 R^2 t^2 / a^2} \quad (3.35)$$

$$D_{TM}^{(0)}(t) = -(2t + 2n_0^2 R^2 t^3 / a^2)^{-1} \quad (3.36)$$

$$D_{TM}^{(-1)}(t) = \frac{-n_0^2 R^2 t (8 + n_0^2 R^2 t^2 / a^2)}{8a^2 (1 + n_0^2 R^2 t^2 / a^2)^{5/2}} - \frac{(2 + n_0^2 t^2) Z^2}{2t^3 \sqrt{1 + n_0^2 t^2}} \quad (3.37)$$

$$D_{TM}^{(-2)}(t) = \frac{n_0^2 R^2 t (10 - 10n_0^2 R^2 t^2 / a^2 + n_0^4 R^4 t^4 / a^4)}{8a^2 (1 + n_0^2 R^2 t^2 / a^2)^4} + \frac{Z^2}{2t^3} \quad (3.38)$$

$$D_{TM}^{(-3)}(t) = \frac{-n_0^2 R^2 t (176a^6 - 784a^4 n_0^2 R^2 t^2 + 480a^2 n_0^4 R^4 t^4 - 23n_0^6 R^6 t^6)}{128a^8 (1 + n_0^2 R^2 t^2 / a^2)^{11/2}} + \frac{Z^2 t^2 (2 + n_0^2 t^2)(4 + 12n_0^2 t^2 + 3n_0^4 t^4) + 2Z^4 (1 + n_0^2 t^2)^2 (8 + 12n_0^2 t^2 + 3n_0^4 t^4)}{16t^5 (1 + n_0^2 t^2)^{7/2}} \quad (3.39)$$

donde  $n_0 = \sqrt{\epsilon_0}$  y  $Z = a\Omega/c$ .

Cabe señalar que en el cálculo del desarrollo asintótico hemos descartado las contribuciones de los términos que contienen  $K_\nu(\frac{n_0 R \nu t}{a})$ , ya que se anulan exponencialmente cuando  $R \rightarrow \infty$ .

Para calcular la extensión analítica de (3.3), debemos considerar entonces

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu=3/2}^{\infty} \nu \Re \left\{ \frac{-\nu^{-s}}{\pi} e^{-i\frac{\pi}{2}(s+1)} \int_{-iz}^{\infty-iz} t^{-s} \frac{d(\ln \Delta_\nu^{TE}(\nu t))}{dt} dt \right\} = \\ & - \sum_{\nu=3/2}^{\infty} \nu \Re \left\{ \frac{\nu^{-s}}{\pi} e^{-i\frac{\pi}{2}(s+1)} \int_{-iz}^{\infty-iz} t^{-s} D_\nu^{TE}(t) dt \right\} - \\ & \sum_{\nu=3/2}^{\infty} \nu \Re \left\{ \frac{\nu^{-s}}{\pi} e^{-i\frac{\pi}{2}(s+1)} \int_{-iz}^{\infty-iz} t^{-s} \left\{ \frac{d(\ln \Delta_\nu^{TE}(\nu t))}{dt} - D_\nu^{TE}(t) \right\} dt \right\}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

El segundo término en el lado derecho de (3.40) converge, por construcción, para  $s > -2$ . Luego se puede poner  $s = -1$  dentro de la suma y la integral y evaluar numéricamente su contribución, si fuese necesario. Sin embargo, como aquí estamos interesados en el cálculo de los términos singulares de (3.3), sólo consideraremos el primer término del lado derecho de (3.40).

### 3.3. Singularidades ultravioletas en la energía de Casimir

Como se dijo al final de la sección 3.2, para calcular las divergencias ultravioletas de  $E_{Cas}$  es suficiente considerar el primer término del lado derecho de (3.40). A los efectos del cálculo, es importante mostrar que no sólo el lado izquierdo de (3.40) es independiente de  $z = x/\nu$  (como ya fue señalado debajo de la expresión (3.22)), sino que también lo es individualmente cada término del lado derecho de esa ecuación. Como veremos, esto facilitará el cálculo de la suma en  $\nu$ .

Investigaremos, en primer lugar, la dependencia en  $z$  de la integral involucrada en el primer término del lado derecho de (3.40). Teniendo en cuenta la analiticidad del integrando, basta con estudiar la integral

$$\int_{-iz}^1 t^{-s} D_{\nu}^{TE}(t) dt. \quad (3.41)$$

Esta integral se puede resolver exactamente en términos de funciones hipergeométricas. De esas expresiones es inmediato verificar que, dado que se puede tomar  $x \rightarrow 0^+$  (recordar que  $z = x/\nu$ ), la parte dependiente de  $z$  en (3.41) resulta imaginaria para todo  $s > 1$ , y luego es eliminada al tomar la parte real en (3.40). En consecuencia, ambos términos en el lado derecho de (3.40) son independientes de  $z$ . Este hecho será de utilidad en los cálculos que siguen.

Una vez investigada la dependencia en  $z$  del segundo miembro de (3.40), dedicaremos el resto de esta sección a aislar sus divergencias ultravioletas. Por construcción, ellas están contenidas en el primer término del lado derecho de esa ecuación. Para  $s > 1$ , podemos estudiar cada término de  $D_{\nu}^{TE}(t)$  por separado, evaluando entonces las expresiones

$$\sum_{\nu=3/2}^{\infty} \nu^{-(s-k-1)} \Re \left\{ \frac{-1}{\pi} e^{-i\frac{\pi}{2}(s+1)} \int_{-iz}^{\infty-iz} t^{-s} D_{TE}^{(k)}(t) dt \right\}, \quad (3.42)$$

donde el índice  $k = 1, \dots, -3$  corresponde a cada orden en el desarrollo de Debye.

Como la parte real de la expresión entre llaves en (3.42) es independiente de  $\nu$  (pues es independiente de  $z = x/\nu$ , como señalamos antes), la suma sobre  $\nu$  queda expresada en términos de la función  $\zeta$  de Hurwitz [66],

$$\sum_{\nu=3/2}^{\infty} \nu^{-(s-k-1)} = \zeta_H(s-k-1, 1/2) - 2^{s-k-1}. \quad (3.43)$$

Esta función presenta una singularidad en  $s = -1$  solamente cuando  $k = -3$ , a saber

$$\zeta_H(s+2, 1/2) \Big|_{s \simeq -1} = \frac{1}{s+1} + (\gamma + \ln(4)) + \mathcal{O}(s+1), \quad (3.44)$$

donde  $\gamma$  es la constante de Euler [69]. Para los demás valores de  $k$  se obtienen continuaciones analíticas de (3.43) regulares en  $s = -1$ .

Luego, es sólo para  $k = -3$  que necesitamos calcular tanto las partes finitas como las singulares de la continuación analítica a  $s = -1$  de la integral involucrada en (3.42). Para los restantes valores de  $k$ , sólo son necesarios los términos singulares de dicha integral.

Todos estos términos se pueden calcular exactamente. Reuniendo sus contribuciones, obtenemos la parte divergente de la contribución de los modos TE a la energía de Casimir. En el límite  $R \rightarrow \infty$  tenemos

$$E_{TE}(a) = \frac{\hbar c}{a} \left\{ -\frac{n_0^3 a^4 \Omega^4}{24 \pi c^4 (1+s)} - \frac{n_0 a^2 \Omega^2}{4 \pi c^2 (1+s)} + \mathcal{O}(s+1)^0 \right\}. \quad (3.45)$$

Notar que el primer término del lado derecho corresponde a una contribución de *volumen* y el segundo es una contribución de *curvatura*. En particular, no aparecen contribuciones de *superficie*. Esto está de acuerdo con lo mencionado en la nota 1 al pie de página del Capítulo 2, relacionado con la aparición de divergencias superficiales en la energía de vacío regularizada para dominios compactos acotados por superficies cerradas: El uso de un modelo de dieléctrico realista en la descripción del medio *suaviza* las singularidades ultravioletas.

Para los modos TM, un cálculo completamente análogo arroja el resultado

$$E_{TM}(a) = \frac{\hbar c}{a} \left\{ -\frac{n_0^3 a^4 \Omega^4}{24 \pi c^4 (1+s)} + \frac{n_0 a^2 \Omega^2}{4 \pi c^2 (1+s)} + \mathcal{O}(s+1)^0 \right\}. \quad (3.46)$$

Finalmente, sumando las dos contribuciones anteriores obtenemos para la parte singular de la energía de Casimir de la esfera dieléctrica sólo una contribución de volumen,

$$E(a) = \frac{\hbar c}{a} \left\{ -\frac{n_0^3 a^4 \Omega^4}{12 \pi c^4 (1+s)} + \mathcal{O}(s+1)^0 \right\}. \quad (3.47)$$

Notar que los términos divergentes de curvatura se han cancelado al sumar las contribuciones de los modos TE y TM. Reescribiendo este resultado en términos del volumen de la esfera,  $V = 4\pi a^3/3$ , encontramos

$$E(a) = -\frac{\hbar n_0^3 \Omega^4}{16 \pi^2 c^3 (1+s)} V + \mathcal{O}(s+1)^0. \quad (3.48)$$

### 3.4. Singularidades ultravioletas del modelo con conductividad

En la sección anterior vimos que al considerar un medio esférico con un comportamiento ultravioleta realista, la energía de Casimir suaviza sus singularidades en el sentido de que sólo contiene un término divergente proporcional al volumen. En esta

sección mostraremos que este comportamiento se mantiene en un caso más general, donde además el medio presenta conductividad.

El problema de la inclusión de conductividad en cálculos de la energía de Casimir está íntimamente ligado a las controversias que hoy en día existen en los resultados obtenidos por diversos grupos sobre el Efecto Casimir a temperatura finita ([48]-[55], entre otras). Una correcta descripción de la fuerza de Casimir *térmica* en *metales reales* podría ser de importancia, por ejemplo, en aplicaciones de nanotecnología [105, 106]. Sin embargo, no se tienen aún resultados concluyentes. Aparentemente, uno de los principales puntos oscuros en esos estudios sobre metales reales está relacionado con la *magnitud* de la constante de amortiguamiento  $\gamma$  (a veces llamado parámetro de relajación), que hemos definido en la sección 2.5.1.

En efecto, en general la expresión usada para la permitividad dieléctrica en cálculos con metales reales es la que hemos hallado en la sección 2.5.1, ecuación (2.70). Aunque sobre este tema existe actualmente una amplia gama de artículos ([51],[107]-[108]) los desacuerdos son aún profundos, al punto de que hay autores que han proclamado que la entropía de Casimir a temperatura cero no es igual a cero, contradiciendo la tercer ley de la termodinámica. Sólo a través de dudosos procedimientos, que evitan la utilización de modelos del tipo de la ecuación (2.70), se logra salvar la situación. Sin embargo, hemos mostrado en la sección 2.5.2 que la relación causal que existe entre el campo eléctrico y el vector desplazamiento *conduce* al comportamiento del tipo (2.70) para la permitividad. El punto de conflicto aquí podría radicar en la nulidad del parámetro  $\gamma$  en el límite de bajas temperaturas.

Según mencionamos a lo largo de la sección 2.5, la constante de amortiguamiento  $\gamma$  debe ser no nula para dar cuenta de conductividad. La consecuencia que introduce esto en nuestros resultados para las singularidades ultravioletas de la energía de Casimir se puede ver modificando la expresión (3.1) de la permitividad eléctrica por

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left( 1 - \frac{\Omega^2}{\omega (\omega + i\gamma)} \right), \quad (3.49)$$

que describe un medio con conductividad finita. El resto del modelo se mantiene igual a lo que hemos descrito en las secciones anteriores, en particular las funciones  $\Delta_\nu^{TE}(z)$  y  $\Delta_\nu^{TM}(z)$ , dadas en las ecuaciones (3.18) y (3.20) respectivamente, con el único cambio de que  $\epsilon(\omega)$  en ellas está dado ahora por (3.49). Como consecuencia, los desarrollos de Debye para los modos TE se ven modificados en

$$D_{TE}^{(1)}(t) = \frac{1}{t} \sqrt{1 + n_0^2 R^2 t^2 / a^2} \quad (3.50)$$

$$D_{TE}^{(0)}(t) = (2t + 2n_0^2 R^2 t^3 / a^2)^{-1} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} D_{TE}^{(-1)}(t) = & \frac{-5 a n_0^4 R^4 t^3}{8 (a^2 + n_0^2 R^2 t^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{a n_0^2 R^2 t}{2 (a^2 + n_0^2 R^2 t^2)^{\frac{3}{2}}} \\ & - \frac{Z^2}{t^3 \sqrt{1 + n_0^2 t^2}} - \frac{n_0^2 Z^2}{2 t \sqrt{1 + n_0^2 t^2}} \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$D_{TE}^{(-2)}(t) = \frac{-(a^6 n_0^2 R^2 t)}{2(a^2 + n_0^2 R^2 t^2)^4} + \frac{5 a^4 n_0^4 R^4 t^3}{4(a^2 + n_0^2 R^2 t^2)^4} - \frac{Z^2}{2 t^3} \\ - \frac{a^2 n_0^6 R^6 t^5}{8(a^2 + n_0^2 R^2 t^2)^4} + \frac{3 Z^2 \Gamma}{2 t^4 \sqrt{1 + n_0^2 t^2}} + \frac{n_0^2 Z^2 \Gamma}{t^2 \sqrt{1 + n_0^2 t^2}} \quad (3.53)$$

$$D_{TE}^{(-3)}(t) = \frac{-1105 a^{11}}{128 t (a^2 + n_0^2 R^2 t^2)^{\frac{11}{2}}} + \frac{663 a^9}{32 t (a^2 + n_0^2 R^2 t^2)^{\frac{9}{2}}} + \frac{3 Z^2 \Gamma}{4 t^4} \\ - \frac{1039 a^7}{64 t (a^2 + n_0^2 R^2 t^2)^{\frac{7}{2}}} + \frac{139 a^5}{32 t (a^2 + n_0^2 R^2 t^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{25 a^3}{128 t (a^2 + n_0^2 R^2 t^2)^{\frac{3}{2}}} \\ - \frac{5 Z^2}{16 t^3 (1 + n_0^2 t^2)^{\frac{7}{2}}} + \frac{13 Z^2}{16 t^3 (1 + n_0^2 t^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{11 Z^2}{16 t^3 (1 + n_0^2 t^2)^{\frac{3}{2}}} \\ + \frac{3 Z^2}{16 t^3 \sqrt{1 + n_0^2 t^2}} - \frac{Z^4}{8 t^5 (1 + n_0^2 t^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3 Z^4}{4 t^5 \sqrt{1 + n_0^2 t^2}} \\ + \frac{3 \sqrt{1 + n_0^2 t^2} Z^4}{8 t^5} - \frac{Z^2 \Gamma^2}{2 t^5 \sqrt{1 + n_0^2 t^2}} - \frac{3 \sqrt{1 + n_0^2 t^2} Z^2 \Gamma^2}{2 t^5}, \quad (3.54)$$

mientras que para los modos TM se tiene

$$D_{TM}^{(1)}(t) = \frac{1}{t} \sqrt{1 + n_0^2 R^2 t^2 / a^2} \quad (3.55)$$

$$D_{TM}^{(0)}(t) = -(2t + 2n_0^2 R^2 t^3 / a^2)^{-1} \quad (3.56)$$

$$D_{TM}^{(-1)}(t) = \frac{7 a n_0^4 R^4 t^3}{8(a^2 + n_0^2 R^2 t^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{a n_0^2 R^2 t}{(a^2 + n_0^2 R^2 t^2)^{\frac{3}{2}}} \\ - \frac{Z^2}{t^3 \sqrt{1 + n_0^2 t^2}} - \frac{n_0^2 Z^2}{2 t \sqrt{1 + n_0^2 t^2}} \quad (3.57)$$

$$D_{TM}^{(-2)}(t) = \frac{5 a^6 n_0^2 R^2 t}{4(a^2 + n_0^2 R^2 t^2)^4} - \frac{5 a^4 n_0^4 R^4 t^3}{4(a^2 + n_0^2 R^2 t^2)^4} + \frac{Z^2}{2 t^3} \\ + \frac{a^2 n_0^6 R^6 t^5}{8(a^2 + n_0^2 R^2 t^2)^4} + \frac{3 Z^2 \Gamma}{2 t^4 \sqrt{1 + n_0^2 t^2}} + \frac{n_0^2 n_0^2 \Gamma}{t^2 \sqrt{1 + n_0^2 t^2}} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned}
D_{TM}^{(-3)}(t) = & \frac{1463 a^{11}}{128 t (a^2 + n_0^2 R^2 t^2)^{\frac{11}{2}}} - \frac{819 a^9}{32 t (a^2 + n_0^2 R^2 t^2)^{\frac{9}{2}}} - \frac{3 Z^2 \Gamma}{4 t^4} \\
& + \frac{1181 a^7}{64 t (a^2 + n_0^2 R^2 t^2)^{\frac{7}{2}}} - \frac{143 a^5}{32 t (a^2 + n_0^2 R^2 t^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{23 a^3}{128 t (a^2 + n_0^2 R^2 t^2)^{\frac{3}{2}}} \\
& - \frac{5 Z^2}{16 t^3 (1 + n_0^2 t^2)^{\frac{7}{2}}} + \frac{Z^2}{16 t^3 (1 + n_0^2 t^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{9 Z^2}{16 t^3 (1 + n_0^2 t^2)^{\frac{3}{2}}} \\
& + \frac{3 Z^2}{16 t^3 \sqrt{1 + n_0^2 t^2}} - \frac{Z^4}{8 t^5 (1 + n_0^2 t^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3 Z^4}{4 t^5 \sqrt{1 + n_0^2 t^2}} \\
& + \frac{3 \sqrt{1 + n_0^2 t^2} Z^4}{8 t^5} - \frac{Z^2 \Gamma^2}{2 t^5 \sqrt{1 + n_0^2 t^2}} - \frac{3 \sqrt{1 + n_0^2 t^2} Z^2 \Gamma^2}{2 t^5}
\end{aligned} \tag{3.59}$$

donde  $n_0 = \sqrt{\epsilon_0}$ ,  $Z = a\Omega/c$  y  $\Gamma = a\gamma/c$ . Notar que los primeros órdenes de ambos desarrollos (determinados por el término dominante en el desarrollo de (3.49) para grandes  $\omega$ ) coinciden con los correspondientes al caso con  $\gamma = 0$  que hemos estudiado anteriormente. La presencia de  $\gamma$  sólo se manifiesta en los órdenes superiores, de acuerdo con los siguientes términos en el desarrollo de  $\epsilon(\omega)$  para grandes  $\omega$  (ver ecuación (2.70)).

El método de cálculo de las divergencias ultravioletas es enteramente similar al de la sección 3.3, así que aquí sólo daremos los resultados finales. Sumando las contribuciones de los modos TE y TM a la parte singular de la energía de Casimir obtenemos, en el límite  $R \rightarrow \infty$ ,

$$E(a) = \frac{\hbar c}{a} \left\{ -\frac{a^4 n_0^3 \gamma^2 \Omega^2}{3 c^4 \pi (1+s)} - \frac{a^4 n_0^3 \Omega^4}{12 c^4 \pi (1+s)} + \mathcal{O}(s+1)^0 \right\}, \tag{3.60}$$

lo que nuevamente corresponde a contribuciones de volumen. El segundo término entre llaves es idéntico al hallado antes, ecuación (3.47), pero ahora aparece un término adicional debido exclusivamente al hecho de haber considerado una conductividad no nula para el medio. Su dependencia con el volumen de la esfera hace que sean aplicables las mismas conclusiones que para (3.47); esto es, que también puede ser cancelado mediante un contratérmino de volumen en la expresión de la *energía clásica* del sistema (lo que corresponde a una renormalización de la densidad de energía del material).

### 3.5. Resumen y conclusiones

En las secciones anteriores encontramos que la estructura de singularidades ultravioletas (en el esquema de la regularización  $\zeta$ ) de la energía de Casimir de una



esfera dieléctrica no magnética es muy simple, una vez que se considera un comportamiento *realista* para la permitividad del medio a altas frecuencias. El único término singular que aparece es un polo simple en  $s = -1$  cuyo residuo es proporcional al volumen de la esfera, que puede interpretarse como una contribución a la densidad de energía del material [27], al estilo de lo que sucede en modelos de la bolsa. Su renormalización deja presente en el modelo una constante fenomenológica que corresponde precisamente a la densidad de masa medible.

En este modelo (y con esta regularización) no son necesarios contratérminos de superficie o curvatura: las divergencias superficiales están ausentes y las de curvatura se cancelan entre sí cuando se suman las contribuciones de los modos transversales eléctricos (TE) y transversales magnéticos (TM).

Si bien este resultado ha sido obtenido en una situación particular con simetría esférica, él parece avalar nuestra hipótesis fundamental de que si se emplean permitividades realistas para la descripción de los medios dieléctricos entonces las divergencias ultravioletas se suavizan, clarificando la interpretación de los modelos clásicos asociados.

Las mismas conclusiones se pueden obtener del estudio de la estructura de divergencias de la energía de Casimir para un modelo simple de *metales reales*, ya que también se trata de contribuciones proporcionales al volumen del medio.

A partir de esta sencilla estructura de polos y contratérminos se ve que tiene sentido analizar las partes finitas de la energía de Casimir en el contexto de una teoría cuántica de campos para medios realistas. Como primer paso se podría adoptar el modelo de Drude para la permitividad del medio y analizar cómo depende la energía de Casimir de, por ejemplo, la frecuencia de plasma  $\Omega$ . En un modelo mejorado, podría considerarse el modelo de Drude sólo para las frecuencias altas, digamos  $\omega > \Omega$ , mientras que para  $\omega < \Omega$  el medio debería describirse por una relación de dispersión representativa de las bajas frecuencias. Esto será hecho en el Capítulo 5, donde analizaremos las partes finitas y singulares de la energía de Casimir en un medio dieléctrico modelado de manera realista, tanto a bajas como a altas frecuencias.



## Capítulo 4

# Energía de Casimir de un campo escalar con condiciones de contorno dependientes de la frecuencia

En este capítulo calculamos la energía de vacío de un campo escalar sujeto a una condición de contorno que depende de la frecuencia del campo [76]. Esta dependencia particular, que emula de manera simplificada el comportamiento de los medios dieléctricos reales, incorpora una frecuencia de corte en las condiciones de contorno impuestas sobre la superficie de separación entre dos medios. Esto se traduce en que la energía de vacío se puede describir en términos de una *función  $\zeta$  incompleta*, a partir de la cual se pueden determinar las contribuciones dominantes (términos de volumen, superficie, etc) de la energía de Casimir del sistema.

El modelo es útil en dos sentidos: por un lado se puede visualizar como un modelo sencillo de prueba que permite establecer un método de cálculo que será usado en el capítulo siguiente. Por otro lado, muestra que las contribuciones dominantes a la energía de Casimir son términos de volumen, que por su magnitud podrían ser relevantes (en un análogo electromagnético) para la descripción de fenómenos tales como el de la sonoluminiscencia [64, 25].

### 4.1. Introducción

Como se mencionó en el Capítulo 2, el Efecto Casimir surge como resultado de la distorsión de la energía de vacío de los campos cuánticos debido a la presencia de contornos, topologías no triviales o campos de background en el dominio de cuantización.

En los últimos años, ha surgido un gran interés en el estudio de la energía de Casimir de campos electromagnéticos en presencia de medios dieléctricos, debido

principalmente a la sugerencia de Schwinger [26] de que el efecto podría ser importante en la explicación del fenómeno de la sonoluminiscencia [64, 25]. Sin embargo, los resultados obtenidos sobre este tema por distintos grupos [27, 80, 81, 82], [29]-[33] usando diferentes técnicas de cálculo (métodos que involucran funciones de Green, fuerzas de van der Waals, desarrollos asintóticos de la densidad de estados, etc.) son controversiales.

En vista de las discrepancias que existen en la materia, en este capítulo comenzamos nuestro estudio considerando, en primer lugar, un modelo simple de un campo escalar sujeto a condiciones de contorno locales sobre la superficie de una esfera, pero dependientes de la frecuencia. Nuestro principal objetivo aquí es establecer un método de cálculo para el cambio que ocurre en la energía de Casimir del campo cuando se varía el radio de la esfera, en una situación en donde las condiciones de contorno imponen una *frecuencia de corte* física,  $\Omega$ .

Consideraremos entonces el modelo simplificado de un campo escalar cuyos modos correspondientes a autofrecuencias  $\omega \leq \Omega$  están confinados al interior de una esfera de radio  $a$ , sobre la que satisfacen condiciones de contorno locales homogéneas [76].

Por otro lado, supondremos que el contorno es completamente transparente para aquellos modos de frecuencia  $\omega > \Omega$ . Luego, su contribución a la diferencia de energía de Casimir para dos radios diferentes se cancelará, independientemente de la regularización utilizada para su definición. Por este motivo, substraeremos estas contribuciones desde un principio, lo que es equivalente a una redefinición del nivel de referencia de la energía de vacío de forma independiente del radio  $a$ .

Para el cálculo de la energía de vacío de los modos de baja frecuencia haremos uso de desarrollos asintóticos de una *función  $\zeta$  incompleta* del modelo, técnica que introduciremos a continuación. Esto permitirá la identificación de los diferentes términos de volumen, superficie, etc, en la energía de Casimir.

Como un ejercicio final, mostraremos que eligiendo valores razonables para la frecuencia de corte y para el radio de la esfera, la energía de Casimir disponible en este modelo es comparable con la energía emitida durante cada ciclo de una burbuja típica en un experimento de sonoluminiscencia [25]. En vista de esto, resulta de gran interés aplicar este método a un modelo análogo para el caso del campo electromagnético en presencia de medios dieléctricos. Este cálculo será realizado en el capítulo 5, para un modelo realista de dieléctrico que toma en consideración el comportamiento dispersivo del medio en todo el rango de frecuencias.

## 4.2. El modelo y su función $\zeta$ incompleta

Consideremos un campo escalar libre en  $\mathbb{R}^3$  que satisface condiciones de contorno locales sobre la superficie de una esfera de radio  $a$ . Las condiciones de contorno dependerán de la frecuencia de los modos normales del campo.

Supondremos que el contorno es completamente transparente para aquellos mo-

dos de frecuencia mayor que una frecuencia de corte  $\Omega$  dada, mientras que los modos con  $\omega < \Omega$  satisfacen

$$\left(\Delta + \frac{w^2}{c^2}\right) \psi_\omega(\vec{r}) = 0, \text{ para } r < a, \quad (4.1)$$

y condiciones de contorno de Dirichlet sobre la esfera

$$\psi_\omega(\vec{r})|_{r=a} = 0, \quad (4.2)$$

quedando confinados al interior de la esfera.

Proponiendo que  $\psi_\omega(\vec{r}) = f_l(r)Y_l^m(\theta, \varphi)$ , la función radial satisface

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\right) f_l(r) = 0, \text{ para } r < a, \quad (4.3)$$

donde las autofrecuencias quedan determinadas por la condición

$$f_l(r) \Big|_{r=a} = 0. \quad (4.4)$$

Las soluciones de (4.3) sujetas a la condición (4.4) y que además son regulares en el origen son  $f_l(r) = \sqrt{\pi/(2z)} J_\nu(z)$ , con  $\nu = l + 1/2$ ,  $l \in \mathbb{N}$  y  $z = \omega_{\nu,n} r/c$ . Las autofrecuencias quedan determinadas como

$$\omega_{\nu,n} = \frac{c}{a} j_{\nu,n}, \quad (4.5)$$

donde  $j_{\nu,n}$  es el  $n$ -ésimo cero de la función de Bessel  $J_\nu(z)$ .

Estamos interesados en el cálculo de la diferencia de energías de vacío para dos situaciones con distinto valor del radio  $a$ . Como hemos señalado, en esta diferencia podemos descartar las contribuciones de aquellos modos con frecuencia  $\omega > \Omega$  porque, al ser independientes de la posición del contorno, sus contribuciones se cancelarán independientemente de la regularización usada en la definición de la energía de vacío.

Luego, para calcular la energía de Casimir debemos evaluar la suma

$$E(a) = \sum_{\nu=1/2}^{\nu_0} 2\nu \sum_{n=1}^{N_\nu} \frac{1}{2} \hbar \omega_{\nu,n}, \quad (4.6)$$

donde  $N_\nu$  es el número de ceros positivos de  $J_\nu(z)$  menores o iguales a  $x := \Omega a/c$ , el factor  $2\nu = 2l + 1$  es la degeneración de cada autovalor, y  $\nu_0$  es el valor máximo de  $\nu$  para el cual  $N_\nu \geq 1$ .

Notar que en (4.6) la suma es finita, dado que el primer cero de  $J_\nu(z)$  crece con  $\nu$ . No obstante, como estamos interesados en una evaluación analítica de (4.6) antes que numérica, utilizaremos un método de suma basado en la evaluación de una

función  $\zeta$  incompleta que definiremos a continuación. Comenzamos con la siguiente representación:

$$\sum_{n=1}^{N_\nu} j_{\nu,n} = \sum_{n=1}^{N_\nu} j_{\nu,n}^{-s} \Big|_{s=-1}, \quad (4.7)$$

donde la suma en el lado derecho de esta ecuación existe  $\forall s \in \mathbb{C}$ .

Notar que la suma en el lado derecho de (4.7) evaluada en  $s = 0$  nos da precisamente  $N_\nu$ , el número de modos que contribuyen a la energía de vacío del campo para cada valor del momento angular  $l = \nu - 1/2$ . Este hecho será usado en la sección 4.3 para calcular  $\nu_0$ .

Como  $J_\nu(z)$  tiene sólo ceros reales para  $\nu > -1$ , y sus ceros no nulos son todos simples [66], podemos utilizar el teorema de Cauchy para representar la suma en el lado derecho de (4.7) como una integral en el plano complejo,

$$\sum_{n=1}^{N_\nu} j_{\nu,n}^{-s} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C z^{-s} \frac{J'_\nu(z)}{J_\nu(z)} dz, \quad (4.8)$$

donde la curva  $C$ , recorrida en sentido antihorario, encierra los  $N_\nu$  primeros ceros positivos de  $J_\nu(z)$ .

Para  $\Re(s)$  suficientemente grande, el contorno  $C$  se puede deformar en dos líneas rectas verticales, una cruzando el eje horizontal en  $\Re(z) = x^+$  y la otra en  $\Re(z) = 0^+$ . Expresando el integrando en términos de las funciones de Bessel modificadas [69]

$$I_\nu(w) = e^{-i(\pi/2)\nu} J_\nu(e^{i(\pi/2)} w), \quad (4.9)$$

relación válida para  $-\pi < \arg(w) \leq \pi/2$ , y teniendo en cuenta su comportamiento asintótico para grandes argumentos [69], es fácil ver que para  $x > 0$  la integral

$$\zeta_\nu(s, x) := \frac{-1}{2\pi i} \int_{x^+-i\infty}^{x^+-i\infty} z^{-s} \frac{J'_\nu(z)}{J_\nu(z)} dz, \quad (4.10)$$

evaluada sobre una recta vertical que corta al eje real en  $\Re(z) = x + \epsilon$  y tomada en el límite  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , converge absoluta y uniformemente para  $s > 1$ . Ella define una función analítica que se extiende como función meromorfa a todo el plano complejo  $s$ .

Luego, para  $s > 1$ ,

$$\sum_{n=1}^{N_\nu} j_{\nu,n}^{-s} = \zeta_\nu(s, 0) - \zeta_\nu(s, x). \quad (4.11)$$

Como el lado izquierdo de (4.11) es una función entera de  $s$ , las singularidades de  $\zeta_\nu(s, x)$  deben ser independientes de  $x$ .

Por otro lado, para  $y > 0$  [69],

$$I_\nu(-y - i x) = e^{-i\pi\nu} I_\nu(y + i x), \quad I_\nu(y + i x) = (I_\nu(y - i x))^*. \quad (4.12)$$

Luego, para  $\Re(s) > 1$  podemos escribir

$$\zeta_\nu(s, x) = \Re \left\{ \frac{-x^{1-s}}{\pi} e^{-i(\pi/2)(s+1)} \int_0^\infty (y-i)^{-s} \frac{I'_\nu(x(y-i))}{I_\nu(x(y-i))} dy \right\}. \quad (4.13)$$

Para construir la extensión analítica de  $\zeta_\nu(s, x)$  a  $s \simeq -1$  vamos a sumar y restar los primeros términos del desarrollo asintótico del integrando en (4.13), que se obtiene a partir del desarrollo asintótico uniforme (desarrollo de Debye) de las funciones de Bessel [69]:

$$\frac{I'_\nu(\nu t)}{I_\nu(\nu t)} = \frac{1}{\nu} D_\nu(t) + \mathcal{O}(\nu^{-3}), \quad (4.14)$$

donde

$$\begin{aligned} D_\nu(t) &= \nu D_\nu^1(t) + D_\nu(t)^0 + \nu^{-1} D_\nu^{-1}(t) \\ &= \frac{\nu \sqrt{1+t^2}}{t} - \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{4t-t^3}{8\nu(1+t^2)^{5/2}}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

que es un desarrollo válido para grandes valores de  $\nu$  con  $t$  fijo. Veremos más adelante que esta aproximación permite la identificación de las contribuciones de volumen, superficie, etc, a la energía de vacío.

En (4.13), cambiando la variable de integración a  $t = z(y-i)$ , con  $z = x/\nu > 0$ , tenemos

$$\zeta_\nu(s, x) = \Re \left\{ \frac{-\nu^{-s}}{\pi} e^{-i(\pi/2)(s+1)} \int_{-iz}^{\infty-iz} t^{-s} \frac{d(\ln I_\nu(\nu t))}{dt} dt \right\}. \quad (4.16)$$

Luego, debemos considerar la integral

$$\begin{aligned} &\int_{-iz}^{\infty-iz} t^{-s} \frac{d(\ln I_\nu(\nu t))}{dt} dt = \\ &\int_{-iz}^{\infty-iz} t^{-s} D_\nu(t) dt + \int_{-iz}^{\infty-iz} t^{-s} \left[ \frac{d(\ln I_\nu(\nu t))}{dt} - D_\nu(t) \right] dt. \end{aligned} \quad (4.17)$$

La segunda integral en el lado derecho de esta ecuación converge para  $s > -2$ , como se puede ver fácilmente estimando el integrando por medio del término de  $\mathcal{O}(\nu^{-3})$  del desarrollo de Debye presentado en (4.14). En efecto, éste se comporta como  $\mathcal{O}(t^{-3})$  para grandes valores de  $|t|$ . Luego esta integral se puede evaluar (numéricamente, por ejemplo) poniendo directamente  $s = -1$ .

En lo que sigue de este capítulo consideraremos la primera integral del lado derecho de (4.17), de la que retendremos sólo los primeros términos de un desarrollo en potencias de  $\nu^{-1}$ , de manera consistente con los órdenes retenidos en (4.14). Como se puede ver de (4.15), el integrando  $D_\nu(t)$  es una función algebraica que presenta

singularidades en  $t = 0, \pm i$ , y se comporta como  $\mathcal{O}(t^0)$  para grandes valores de  $t$ . Luego, la integral converge absoluta y uniformemente para  $s > 1$ , donde define una función analítica que se extiende a una función meromorfa en la región de interés del parámetro  $s$ . Como se verá más adelante, esta prolongación muestra que las singularidades de  $\zeta_\nu(s, x)$  son polos simples, con residuos que resultan independientes de  $x$ . Esto último es una condición necesaria para que el resultado de (4.11) sea finito para todo  $s$ .

Haciendo uso de la analiticidad del integrando, podemos cambiar el camino de integración para escribir

$$\begin{aligned}
& \int_{-iz}^{\infty - iz} t^{-s} D_\nu(t) dt = \\
& \int_{-iz}^1 t^{-s} \left( \frac{\nu \sqrt{1+t^2}}{t} - \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{4t-t^3}{8\nu(1+t^2)^{5/2}} \right) dt + \\
& \int_1^\infty t^{-s} \left[ \frac{\nu \sqrt{1+t^2}}{t} - \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{4t-t^3}{8\nu(1+t^2)^{5/2}} - \right. \\
& \quad \left. \left( \nu \left(1 + \frac{1}{2t^2}\right) - \frac{1}{2t} - \frac{1}{8\nu t^2} \right) \right] dt + \\
& \int_1^\infty t^{-s} \left( \nu \left(1 + \frac{1}{2t^2}\right) - \frac{1}{2t} - \frac{1}{8\nu t^2} \right) dt.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

La primera integral en el lado derecho de (4.18), que contiene toda la dependencia con  $x = \nu z$ , es una función entera de  $s$  y puede ser evaluada directamente en el valor requerido de ese parámetro ( $s = -1$ ). En la integral sobre  $(1, \infty)$ , hemos restado y sumado los primeros términos del desarrollo en serie de  $D_\nu(t)$  para grandes valores de  $t$ . Esto hace que la segunda integral sea convergente para  $s > -2$ , y que la tercera deba ser evaluada para  $s > 1$ , para luego determinar su continuación analítica a los valores relevantes de  $s$ . Esto último se puede hacer exactamente, encontrándose que su contribución a  $\zeta_\nu(s, x)$  en (4.16) es la parte real de

$$\frac{e^{-i(\pi/2)(s+1)}}{\nu^{1+s} 8\pi} \left( \frac{8\nu^2}{1-s} + \frac{4\nu}{s} + \frac{1-4\nu^2}{1+s} \right). \tag{4.19}$$

Esta expresión tiene polos simples en  $s = 0, \pm 1$ , las únicas singularidades de



$\zeta_\nu(s, x)$  para  $\Re(s) > -2$ . Como esperábamos, los residuos son independientes de  $x$ ,

$$\begin{aligned} \text{Res } \zeta_\nu(s, x)|_{s=1} &= \frac{1}{\pi}, \\ \text{Res } \zeta_\nu(s, x)|_{s=0} &= 0, \\ \text{Res } \zeta_\nu(s, x)|_{s=-1} &= \frac{1 - 4\nu^2}{8\pi}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Por ejemplo, para  $\zeta_\nu(s, x)$  alrededor de  $s = -1$  y con  $\nu < x$  (este resultado se necesitará en la sección 4.4 para evaluar la energía de vacío), resulta inmediato obtener el desarrollo de Laurent

$$\begin{aligned} \zeta_\nu(s, x > \nu) &= \frac{1 - 4\nu^2}{8\pi(1+s)} + \left[ \frac{4\nu^2 - 1}{8\pi} \left( \ln\left(\frac{\nu}{2}\right) + \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) \right) - \right. \\ &\quad \left. \frac{\nu^2}{4\pi} - \frac{\nu^2}{2\pi} z \sqrt{z^2 - 1} - \frac{3z - 8z^3}{24\pi(z^2 - 1)^{3/2}} - \frac{1}{3\pi} + \mathcal{O}(\nu^{-1}) \right] + \mathcal{O}(s + 1), \end{aligned} \quad (4.21)$$

con  $z = x/\nu \gtrsim 1$ .

Por otro lado, cuando  $x \rightarrow 0^+$ , un cálculo similar conduce a

$$\begin{aligned} \zeta_\nu(s, 0) &= \frac{1 - 4\nu^2}{8\pi(1+s)} + \left[ \frac{4\nu^2 - 1}{8\pi} \log\left(\frac{\nu}{2}\right) - \right. \\ &\quad \left. \frac{\nu^2}{4\pi} - \frac{\nu}{4} - \frac{1}{3\pi} + \mathcal{O}(\nu^{-1}) \right] + \mathcal{O}(s + 1). \end{aligned} \quad (4.22)$$

En la sección siguiente evaluaremos el número de modos que contribuyen en (4.11) como función de  $\nu$ . En la sección 4.4, calcularemos las contribuciones de esos modos a la energía de vacío.

### 4.3. El número de modos que contribuyen

Esta sección está dedicada a la determinación de  $\nu_0$  en (4.6), el máximo valor de  $\nu$  para el cual  $N_\nu \geq 1$ . Aunque en este caso simple los ceros de  $J_\nu(w)$  son bien conocidos [69], preferimos establecer un criterio que pueda ser usado en las situaciones más generales de los próximos capítulos.

En primer lugar notamos que

$$N_\nu(x) \equiv \sum_{n=1}^{N_\nu} j_{\nu,n}^{-s} \Big|_{s=0} = [\zeta_\nu(s, 0^+) - \zeta_\nu(s, x)]|_{s=0} \quad (4.23)$$

es una función discontinua de  $x$  que tiene un salto de altura uno en cada zero positivo  $j_{\nu,n}$  de la función de Bessel  $J_\nu(w)$ .

Luego,  $\nu_0$  puede ser determinado de la condición

$$N_{\nu_0}(x) = N_{\nu_0}(j_{\nu_0,1} + 0) = 1 \quad (4.24)$$

con  $N_{\nu_0}(j_{\nu_0,1} - 0) = 0$ .

Teniendo en cuenta que  $\text{Res } \zeta_\nu(s, x)|_{s=0} = 0$  (ver (4.20)) y el hecho de que la segunda y tercera integrales en el lado derecho de (4.18) son reales, se puede obtener de manera directa de (4.16) - (4.18) que

$$\begin{aligned} \zeta_\nu(s=0, x) &= -\frac{\nu}{2} - \frac{1}{4} + \\ \Re \left[ -\frac{i\nu}{\pi} \left( \sqrt{1 + e^{-i\pi} z^2} - \ln(1 + \sqrt{1 + e^{-i\pi} z^2}) \right) + \right. \\ &\quad \left. \frac{i}{4\pi} \ln(1 + e^{-i\pi} z^2) + \frac{i(2 + 3z^3)}{24\nu\pi(1 + e^{-i\pi} z^2)^{3/2}} \right] + \mathcal{O}(\nu^{-2}), \end{aligned} \quad (4.25)$$

donde hemos tomado  $z = x/\nu \approx 1$ . En particular, para  $x \rightarrow 0^+$ ,

$$\zeta_\nu(s=0, x=0) = -\frac{\nu}{2} - \frac{1}{4} + \mathcal{O}(\nu^{-2}), \quad (4.26)$$

en acuerdo con [74].

Ahora, tomando la diferencia entre (4.26) y (4.25) logramos una aproximación suave,  $\tilde{N}_\nu(x) + \mathcal{O}(\nu^{-1})$ , de la función escalonada  $N_\nu(x)$  definida en (4.23). Es fácil ver que  $\tilde{N}_\nu(x) = 0$  para  $\nu > x$ , mientras que para  $\nu < x$  tenemos

$$\tilde{N}_\nu(x) = \frac{\nu}{\pi} \left( \sqrt{z^2 - 1} - \arctan(\sqrt{z^2 - 1}) \right) - \frac{1}{4} - \frac{2 + 3z^3}{24\nu\pi(z^2 - 1)^{3/2}}, \quad (4.27)$$

con  $z = x/\nu$ .

Ahora vamos a determinar el valor de  $\nu_0$  para el cual

$$\tilde{N}_{\nu_0}(x) = \frac{1}{2}. \quad (4.28)$$

Para esto, proponemos un desarrollo de la forma

$$\sqrt{z_0^2 - 1} = \varepsilon_1 \nu_0^{-1/3} + \varepsilon_3 \nu_0^{-3/3} + \mathcal{O}(\nu_0^{-5/3}), \quad (4.29)$$

el cual tiene sentido para  $\nu_0 \gg 1$  y  $z_0 = x/\nu_0 \approx 1$ . Reemplazando en (4.27) e imponiendo (4.28), podemos determinar los coeficientes  $\varepsilon_k$  orden por orden en  $\nu_0^{-1/3}$  para obtener

$$x = \nu_0 + 1,857 \nu_0^{1/3} + 1,034 \nu_0^{-1/3} + \mathcal{O}(\nu_0^{-1}), \quad (4.30)$$

o bien, invirtiendo este desarrollo,

$$\nu_0 = x - 1,857 x^{1/3} + 0,1155 x^{-1/3} + \mathcal{O}(x^{-1}). \quad (4.31)$$

Notar que, como se esperaba,  $\nu_0 < x$ .

La ecuación (4.30) está en excelente acuerdo con la expresión del primer cero no nulo de  $J_{\nu_0}(w)$  para un orden  $\nu_0$  grande [69]:  $j_{\nu_0,1} = \nu_0 + 1,8557 \nu_0^{1/3} + 1,0331 \nu_0^{-1/3} + \mathcal{O}(\nu_0^{-1})$ .

## 4.4. Contribuciones dominantes a la energía de vacío

En esta sección evaluamos las primeras contribuciones a la energía de vacío obtenidas del desarrollo de Debye usado en la sección 4.2. Como veremos, esto nos permitirá determinar términos de volumen, superficie, etc, en la energía de Casimir del campo escalar.

De acuerdo con los resultados de las secciones anteriores, estamos interesados en el desarrollo de Laurent alrededor de  $s = -1$  de las funciones  $\zeta_\nu(s, x > \nu)$  y  $\zeta_\nu(s, x = 0)$  dadas en (4.21) y (4.22). Como mencionamos antes, las partes singulares se cancelan al efectuar la diferencia en la ecuación (4.11) (ver (4.20)). Para la diferencia de las partes finitas tenemos

$$\begin{aligned} z F(x, \nu) &:= [\zeta_\nu(s, 0^+) - \zeta_\nu(s, x)]|_{s=-1} = \\ &\frac{\nu^2}{2} \left( z \sqrt{z^2 - 1} - \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) \right) - \frac{\nu}{4} + \\ &\frac{3z - 8z^3}{24\pi(z^2 - 1)^{3/2}} + \frac{1}{8\pi} \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) + \mathcal{O}(\nu^{-1}). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Esta es una buena aproximación para  $\nu \gg 1$  y  $z = x/\nu \gtrsim 1$ .

Nuestro objetivo es evaluar la suma de (4.6)

$$\begin{aligned} E(a = xc/\Omega) &= \frac{\hbar\Omega}{x} \sum_{\nu=1/2}^{\nu_0} \nu [\zeta_\nu(-1, 0^+) - \zeta_\nu(-1, x)] \\ &= \hbar\Omega \sum_{\nu=1/2}^{\nu_0} F(x, \nu), \end{aligned} \quad (4.33)$$

con  $\nu_0$  dado en (4.31).

La función  $F(x, \nu)$  es no negativa y tiene un pico pronunciado en  $\nu \approx x/2$  (es decir,  $z \approx 2$ ). Luego el uso de la aproximación de (4.32) es consistente si  $x \gg 1$ .

Para realizar la suma indicada en (4.33), hacemos uso de la fórmula de suma de Euler-Maclaurin [69]. De (4.32), se puede ver que los términos sucesivos en la fórmula de suma,

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1/2}^{\nu_0} F(x, \nu) &= \int_{1/2}^{\nu_0} F(x, \nu) d\nu + \frac{1}{2} [F(x, \nu_0) + F(x, 1/2)] \\ &\quad + \frac{1}{12} \partial_\nu [F(x, \nu)] \Big|_{\nu=1/2}^{\nu=\nu_0} + \dots, \end{aligned} \quad (4.34)$$

son de orden creciente en  $x^{-1}$ . Luego, reteniendo los primeros términos consistentes con la aproximación hecha, tenemos para la energía de vacío

$$\begin{aligned} \frac{E(a)}{\hbar\Omega} &= x^3 \left( \frac{(5 - 2 z_0^2) \sqrt{z_0^2 - 1}}{24 \pi z_0^3} + \frac{2 z_0^4 - 3 \ln(z_0 + \sqrt{z_0^2 - 1})}{24 \pi z_0^4} \right) \\ &\quad - x^2 \left( \frac{-\sqrt{z_0^2 - 1}}{24 \pi z_0^2} + \frac{\pi + 3 \ln(z_0 + \sqrt{z_0^2 - 1})}{12 \pi z_0^3} \right) \\ &\quad - x \left( \frac{(27 - 17 z_0^2)}{48 \pi z_0 \sqrt{z_0^2 - 1}} + \frac{6 \pi - 10 z_0^2 + 69 \ln(z_0 + \sqrt{z_0^2 - 1})}{48 \pi z_0^2} \right) + \mathcal{O}(x^0), \end{aligned} \quad (4.35)$$

donde  $z_0 = x/\nu_0$ ,  $x = a\Omega/c$ , y  $\nu_0$  está dado en (4.31). En esta expresión ya se pueden reconocer contribuciones de volumen, superficie y curvatura a  $E(a)$ . Cabe señalar que podríamos haber retenido cualquier número de términos en el desarrollo asintótico de (4.14) para obtener, siguiendo los mismos pasos que en el cálculo anterior, la energía de Casimir a cualquier orden en  $x^{-1}$ .

Finalmente, reemplazando en (4.35)  $z_0 \rightarrow x/\nu_0$ ,  $\nu_0$  por la expresión (4.31) y  $x \rightarrow a\Omega/c$ , tenemos

$$\begin{aligned} E(a) &= \hbar\Omega \left[ \frac{x^3}{12 \pi} - \frac{x^2}{12} - 0,1343 x^{4/3} + \mathcal{O}(x) \right] = \\ &= \hbar\Omega \left[ \frac{(a\Omega/c)^3}{12 \pi} - \frac{(a\Omega/c)^2}{12} - 0,1343 (a\Omega/c)^{4/3} + \mathcal{O}(x) \right], \end{aligned} \quad (4.36)$$

de donde podemos ver que los términos de volumen y superficie son dominantes para  $x \gg 1$ . Las potencias no enteras del radio  $a$ , como el tercer término de (4.36), aparecen como consecuencia de la relación entre  $\nu_0$  y  $x$  en (4.31), que involucra potencias no enteras.

## 4.5. Resumen y conclusiones

En las ecuaciones (4.35) y (4.36) hemos calculado las contribuciones dominantes a la energía de vacío de un campo escalar en un modelo con una condición de contorno dependiente de la frecuencia, que consiste en el confinamiento al interior de una esfera de radio  $a$  de los modos de baja frecuencia (hasta una frecuencia de corte física  $\Omega$ ).

Esos modos están sujetos a condiciones de contorno de Dirichlet sobre la superficie de la esfera, mientras que aquellos con frecuencias mayores que  $\Omega$  son libres, pues para ellos el contorno es completamente transparente. Esta característica del modelo permite la sustracción de la contribución de los modos de alta frecuencia a la energía de vacío, lo cual no tiene consecuencias en la evaluación de diferencias de energía pues es equivalente a una redefinición (independiente de  $a$ ) del nivel de referencia de la energía.

Así, hemos representado la suma sobre las autofrecuencias hasta la frecuencia de corte  $\Omega$  en términos de una función  $\zeta$  *incompleta* asociada con el operador Laplaciano en la esfera con condiciones de contorno de Dirichlet, ecuación (4.11).

La función  $\zeta(s, x)$  está definida por la serie de la ecuación (4.13) sólo para  $\Re(s) > 1$ . Luego, fue necesario evaluar su continuación analítica desde esa región a los valores relevantes del parámetro  $s$ , que son  $s = 0$ , necesario para evaluar el momento angular máximo  $l_0 = \nu_0 - 1/2$  correspondiente a autofrecuencias menores o iguales que  $\Omega$ , y  $s = -1$ , necesario para evaluar la contribución a la energía de Casimir de los modos con momento angular  $l = \nu - 1/2$  (con  $l \leq l_0$ ). Este resultado fue obtenido aproximando el integrando en (4.13) mediante el uso del desarrollo asintótico uniforme de Debye para las funciones de Bessel modificadas que aparecen en su expresión.

Este procedimiento nos condujo a una función meromorfa que tiene polos simples con residuos que fueron evaluados exactamente y que resultan independientes de la frecuencia de corte (ver (4.20)). Esto es una condición necesaria, dado que la suma en el lado izquierdo de (4.11) es finita para todo complejo  $s$ .

Por otro lado, hemos evaluado la parte finita de  $\zeta(s, x)$  hasta términos de un orden dado en  $\nu^{-1}$ . Aunque en este cálculo hemos retenido sólo los primeros términos de ese desarrollo asintótico (ver (4.14)), siguiendo los mismos pasos que en las secciones anteriores es posible determinar la parte finita de  $\zeta(s, x)$  en  $s = -1$  (o en  $s = 0$ ) hasta cualquier orden dado en  $\nu^{-1}$ .

Finalmente, aplicando la formula de suma de Euler-Maclaurin hemos arribado a una expresión para la energía de Casimir del modelo en la cual se reconocen contribuciones de volumen, superficie, y curvatura, ecuación (4.35).

Para un valor de la frecuencia de corte correspondiente a  $x = a\Omega/c \gg 1$ , los términos dominantes en la energía de vacío, ecuación (4.36), son proporcionales al volumen ( $V = 4\pi a^3/3$ ) y al área de la esfera ( $S = 4\pi a^2$ ),

$$\frac{E(a)}{\hbar\Omega} = V \frac{\Omega^3}{16 \pi^2 c^3} + \xi S \frac{\Omega^2}{12 \pi^2 c^2} + \dots, \quad (4.37)$$

donde  $\xi = -\pi/4$ .

Cabe señalar que si los modos de baja frecuencia del campo escalar estuvieran sujetos a condiciones de contorno de Neumann en lugar de las de Dirichlet, tendríamos la misma expresión que (4.37) para los términos dominantes, pero con  $\xi = \pi/4$ . Esto está en completo acuerdo con lo obtenido a partir del desarrollo de la densidad de estados en potencias del inverso de la longitud de onda [83, 30]. En efecto, para campos escalares sujetos a condiciones de contorno locales homogéneas, la densidad de estados se ve modificada por efectos de volumen finito [83]. La primer corrección en el desarrollo asintótico para grandes valores del inverso de la longitud de onda,  $k$ , está dado por

$$\sum_n \sim V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} + S \int \xi \frac{d^3k}{(2\pi)^3 k} + \dots, \quad (4.38)$$

donde el coeficiente  $\xi$  toma los valores  $\xi = -\pi/4$ ,  $\xi = +\pi/4$ , y  $\xi = +\pi/4$  para condiciones de contorno de Dirichlet, Neumann, y Robin, respectivamente. Introduciendo la relación de dispersión  $\omega(k) = ck$  y un corte dado por  $K = \Omega/c$ , se puede obtener fácilmente la ecuación (4.37) para la energía de vacío<sup>1</sup>.

Sin embargo, para condiciones de contorno de *juntura*, como son las que aparecen en problemas con dieléctricos (ver capítulo 5), el coeficiente  $\xi$  tiene en general una expresión complicada, lo que dificulta un cálculo del tipo de (4.38) [30].

Volviendo a nuestra expresión para la energía de vacío, ecuación (4.36), como un ejercicio final podemos estimar el valor de la frecuencia de corte  $\Omega$  necesaria para producir la cantidad de energía emitida por una burbuja típica en un experimento de sonoluminiscencia: adoptaremos los valores de los radios inicial y final, y de la energía emitida por una burbuja sonoluminiscente en su colapso<sup>2</sup> [25], y sencillamente tomaremos la diferencia de la contribución de las bajas frecuencias a la energía de Casimir del campo escalar para esos valores del radio de la esfera.

Si la burbuja colapsa desde un radio inicial  $a = 4 \cdot 10^{-5}$  m a un radio final de una décima de este valor, y si la energía emitida fuera de  $\mathcal{E} = 1,2 \cdot 10^{-12}$  J, imponiendo la igualdad

$$\frac{a}{\hbar c} [E(a) - E(a/10)] = 1,516 \times 10^9, \quad (4.39)$$

donde  $E$  en la expresión de arriba es aproximada por la ecuación (4.36), se obtiene que  $x = 490$ , lo que justifica la aproximación usada ( $x \gg 1$ , párrafo posterior a la ecuación (4.33)).

Esto implica que  $\Omega = 3,675 \times 10^{15}$  1/seg, lo cual corresponde a un corte ultravioleta para la longitud de onda,  $\Lambda = 5,129 \times 10^{-7}$  m = 5129 Å, cercana a la región donde el índice de refracción del agua se hace esencialmente igual a uno [34]. Esto sugiere considerar un modelo similar para el caso del campo electromagnético en presencia de medios dieléctricos, cálculo que será abordado en el Capítulo 5.

<sup>1</sup>No obstante, la relación entre  $\nu_0$  y  $x$ , ecuación (4.31), introduce además potencias no enteras del radio  $a$  en el desarrollo (4.36).

<sup>2</sup>En el Capítulo 5 describiremos en detalle este fenómeno.

## Capítulo 5

# Energía de Casimir para medios dieléctricos dispersivos esféricamente simétricos

En este capítulo consideramos la energía de vacío del campo electromagnético en el background de dos medios dieléctricos esféricos concéntricos, modelados por una relación de dispersión que presenta una frecuencia de corte común a ambos. Estas relaciones se traducen en una condición de contorno en la superficie de separación entre ambos medios que depende de la frecuencia. La energía de Casimir de este sistema se describe en términos de la función  $\zeta$  *incompleta* del problema, siguiendo los lineamientos del capítulo anterior.

El uso del desarrollo asintótico de Debye para las funciones de Bessel permite determinar las contribuciones dominantes en la energía de Casimir, que resultan ser términos de volumen, superficie, etc. Se discute la aplicación de estos resultados al caso de una burbuja de gas inmersa en agua, encontrando resultados que son consistentes con la propuesta de Schwinger acerca del papel que podría jugar la energía de Casimir en el fenómeno de la sonoluminiscencia. También se analizan las partes finitas y singulares provenientes de las contribuciones a la energía de vacío proveniente del rango de altas frecuencias.

### 5.1. Introducción

Como se mencionó en el capítulo 2, el Efecto Casimir ha cobrado creciente interés en diversas áreas de la física, desde física estadística hasta física de partículas elementales y cosmología.

En particular, en los últimos años, ha surgido un gran interés en el estudio de la energía de Casimir del campo electromagnético en presencia de medios dieléctricos, debido principalmente a la sugerencia de Schwinger [84] de que podría desempeñar un papel importante en el fenómeno de la sonoluminiscencia [64, 25], conocido desde

hace más de medio siglo pero aún carente de explicación.

En la actualidad, existen esencialmente dos maneras en que es estudiado el problema de la energía de Casimir en medios dieléctricos. Una consiste en sumar las fuerzas de van der Waals retardadas entre moléculas individuales que forman el medio [85, 86]. La segunda hace uso de la teoría cuántica de campos para evaluar la energía de vacío del campo electromagnético en el background de un medio dieléctrico (ver por ejemplo [87, 63, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94]). Sin embargo, la relación entre estas dos aproximaciones aún no ha sido bien establecida: sólo se ha mostrado que hasta el segundo orden de un desarrollo perturbativo apropiado para medios dieléctricos diluidos ambos métodos arrojan los mismos resultados [27, 58, 80].

Por otra parte, hay que tener presente que el Efecto Casimir es una propiedad de los campos cuánticos que va más allá de la estructura de los cuerpos materiales, por lo que nosotros seguiremos la estrategia de sumar las energías de vacío de los modos normales de oscilación.

La idea de dar una explicación al fenómeno de la sonoluminiscencia basada en la energía de Casimir de una burbuja en un medio dieléctrico fue desarrollada inicialmente por Schwinger [26]. Pero sobre ese punto hay aún un considerable desacuerdo [63, 32]. Los resultados obtenidos para dieléctricos no dispersivos por diversos grupos de trabajo, empleando distintas técnicas de cálculo (como métodos involucrando funciones de Green, fuerzas de van der Waals, funciones espectrales y desarrollos de la densidad de estados, ver [95, 96, 29, 30, 31, 97, 58, 98, 99, 32, 33, 100, 101]), son contradictorios en algunos puntos básicos, los que aún deben ser clarificados.

Por ejemplo, en [32] se estudia el problema de la emisión de fotones debida a un brusco cambio en las propiedades dieléctricas del medio, calculando el espectro de partículas emitidas a partir de la evaluación de los coeficientes de Bogoliubov que relacionan los estados inicial y final. Estos resultados estarían de acuerdo con la explicación propuesta por Schwinger [26].

No obstante, hay autores [29] que están en franco desacuerdo con esa explicación del fenómeno, basándose en ciertos argumentos de renormalización para descartar términos de volumen y superficie en la energía de Casimir. Esos autores [63, 29] tampoco toman en cuenta el comportamiento real de la permitividad a altas frecuencias, definiendo la energía de Casimir mediante regularizaciones que conducen a un resultado inconsistente con el experimento, tanto por su magnitud como por su signo.

En ese contexto de controversia resulta de sumo interés, para su comparación con el experimento, el cálculo de la energía de Casimir en modelos realistas de medios dieléctricos.

En particular, como se discutió en la sección 2.4, no hay acuerdo acerca de la *renormalización* necesaria para remover las singularidades que aparecen en la energía de vacío, un hecho que dificulta la interpretación de las partes finitas. En ese sentido, hemos postulado que estos inconvenientes pueden tener su origen en el hecho de que los modelos empleados habitualmente en la descripción de los medios dieléctricos no incorporan, en general, una relación de dispersión *realista*, con dependencia de la



frecuencia, conduciendo de ese modo a un comportamiento ultravioleta inadecuado.

En efecto, en el capítulo 3 (ver también [75]), hemos analizado la estructura de las singularidades ultravioletas en la energía de vacío para el problema de una esfera dieléctrica no magnética con una permitividad dependiente de la frecuencia, cuyo comportamiento se obtiene de la aproximación de altas frecuencias al modelo de Drude. Mostramos allí que la función  $\zeta$  del problema presenta una estructura de polos muy simple, que hace que sólo sea necesario un contratérmino de volumen para hacer finita a la energía de Casimir. Esto es equivalente a una renormalización de la densidad de energía del material, no siendo necesarios contratérminos de superficie ni de curvatura en ese modelo. Este resultado sustenta nuestra hipótesis fundamental acerca de que una relación de dispersión suficientemente realista podría actuar como un *regulador natural* para la energía de vacío.

De ese modo, con el comportamiento ultravioleta bajo control, tiene sentido preocuparse de analizar las partes finitas de la energía de Casimir para medios realistas.

Utilizaremos modelos que incorporan rasgos realistas, tanto para los modos de baja frecuencia como para los de alta frecuencia del campo. Para las contribuciones provenientes de los modos de baja frecuencia, consideraremos primero permitividades constantes hasta cierta frecuencia de corte  $\Omega$  común a ambos medios [102]. Esto se reflejará en las condiciones de contorno sobre la superficie de separación entre dieléctricos. En primera aproximación, supondremos que el contorno es completamente transparente para las frecuencias mayores que  $\Omega$ , a partir de la cual las constantes dieléctricas de los medios toman el valor correspondiente al vacío.

Evaluaremos la energía de Casimir para un arreglo de dos medios con simetría esférica sumando sobre las autofrecuencias del sistema. La existencia de una frecuencia de corte  $\Omega$  nos permitirá sustraer la contribución de las altas frecuencias,  $\omega > \Omega$ , mientras que las contribuciones de las bajas frecuencias se representarán en términos de la *función  $\zeta$  incompleta* de este problema [102]. Un modelo simplificado de esta situación, para el caso de un campo escalar, fue discutido en el capítulo 4 (ver también [76]). Finalmente, el uso de los desarrollos asintóticos uniformes para las funciones de Bessel permitirá llevar a cabo las extensiones analíticas necesarias para identificar las contribuciones dominantes (para grandes valores de  $\Omega$ ) a la energía de Casimir [102].

Para las contribuciones provenientes de los modos de alta frecuencia del campo,  $\omega > \Omega$ , utilizaremos posteriormente el modelo de Drude (discutido en el capítulo 3) en el marco de la regularización  $\zeta$ . Mostraremos que, por un lado, las partes finitas son poco relevantes frente a las contribuciones provenientes de las bajas frecuencias, mientras que por otro lado verificaremos que las singularidades ultravioletas en la energía de vacío son efectivamente términos de volumen. En esas condiciones, como se dijo más arriba, sólo es necesario un contratérmino de volumen (que renormaliza la densidad de masa del material) para hacer finita la energía de Casimir.

Estos resultados serán aplicados al caso de una burbuja de gas en agua, una

situación de interés para la sonoluminiscencia. Como veremos, nuestros resultados sustentan la propuesta de Schwinger acerca del papel que jugaría la energía de Casimir en este fenómeno [102].

Las secciones 5.2, 5.3, 5.4, 5.5 y 5.6 están dedicadas al cálculo de las contribuciones dominantes a la energía de Casimir para los modos de *baja* frecuencia, y su aplicación a la sonoluminiscencia. En la sección 5.2 presentamos el modelo y construimos las correspondientes funciones  $\zeta$  incompletas. Las representaciones como integrales en el plano complejo que emplearemos para estas funciones serán justificadas en el Apéndice C, donde estudiaremos las propiedades de las autofrecuencias de este sistema.

En la sección 5.3 evaluamos el número (finito) de modos que dan una contribución a la energía de vacío para cada valor del momento angular. En la sección 5.4 calculamos los términos de volumen y de superficie de la energía de Casimir. En la sección 5.5 evaluamos la *presión* electromagnética sobre la superficie de separación entre dieléctricos, y el cambio de la energía de vacío con respecto al volumen. Finalmente, en la sección 5.6 discutimos la aplicación de nuestros resultados al fenómeno de la sonoluminiscencia.

Por otro lado, en la sección 5.7 estudiamos las contribuciones provenientes de los modos de alta frecuencia, tanto sus partes finitas como sus singularidades. En la sección 5.8 presentamos un resumen y nuestras conclusiones.

## 5.2. El modelo a bajas frecuencias y su función $\zeta$ incompleta

### 5.2.1. El modelo

Nuestro objetivo es evaluar la energía de Casimir de una burbuja dieléctrica esférica de radio  $a$ , con índices  $\mu_1(\omega)$ ,  $\epsilon_1(\omega)$  relativos al vacío, inmersa en un segundo medio de índices  $\mu_2(\omega)$ ,  $\epsilon_2(\omega)$ . Como se mencionó en la introducción, para los modos de baja frecuencia del campo,  $\omega < \Omega$ , supondremos que  $\mu_i(\omega)$  y  $\epsilon_i(\omega)$ , con  $i = 1, 2$ , son constantes. Aquí  $\Omega$  es la *frecuencia de corte*, y para los modos con  $\omega > \Omega$  los índices anteriores se hacen iguales a los del vacío<sup>1</sup>. Esta última restricción se refleja en una *condición de contorno dependiente de la frecuencia* para el campo electromagnético en la superficie de separación entre los dos medios dieléctricos, haciendo que el contorno sea totalmente transparente para aquellos modos de frecuencia mayor que la de corte,  $\Omega$ .

Evaluaremos la energía de Casimir del campo electromagnético en este arreglo de medios a través de la suma de sus autofrecuencias hasta la frecuencia de corte,  $\omega \leq \Omega$ . Notar que, bajo las condiciones antes mencionadas, la contribución de los modos con frecuencia  $\omega > \Omega$  puede ser descartada desde un principio, redefiniendo

---

<sup>1</sup>Alguno de los medios, por ejemplo el interior, podría ser el mismo vacío, de manera tal que la frecuencia de corte  $\Omega$  fuera una característica del otro dieléctrico.

el nivel de referencia de la energía mediante la sustracción de una cantidad divergente pero independiente del radio  $a$ . Volveremos sobre este punto en la sección 5.6, cuando consideremos el cálculo de las partes finitas y singulares provenientes de la contribución de altas frecuencias según el modelo de Drude.

Buscamos soluciones de las ecuaciones de Maxwell en un medio dieléctrico homogéneo de la forma  $\vec{E}, \vec{B} \sim \exp(-i\omega t)$ , lo que conduce a las relaciones (3.5).

Como dijimos antes, estamos interesados en una burbuja dieléctrica de radio  $a$  e índices  $\mu_1, \epsilon_1$ , rodeada por otro dieléctrico de índices  $\mu_2, \epsilon_2$ . Para  $\omega \leq \Omega$ , el campo electromagnético satisface condiciones de contorno de dieléctrico sobre la superficie de la burbuja, las que, en coordenadas esféricas, se escriben como en (3.7).

Dentro de cada medio, el campo eléctrico satisface la ecuación de Helmholtz (3.6), y se tiene una ecuación similar para el campo magnético  $\vec{B}$ .

Como en el Capítulo 3, la simetría esférica y la linealidad del problema permiten describir al campo electromagnético como una superposición de modos *transversales eléctricos* (TE) y modos *transversales magnéticos* (TM). Recordemos que para los modos TE el campo eléctrico toma la forma

$$\vec{E}_{l,m}^{(TE)} = f_l(r) \vec{L} Y_{l,m}(\theta, \phi), \quad (5.1)$$

mientras que para los modos TM es el campo magnético el que se escribe como

$$\vec{B}_{l,m}^{(TM)} = g_l(r) \vec{L} Y_{l,m}(\theta, \phi), \quad (5.2)$$

con  $l = 1, 2, \dots$  en ambos casos y el operador  $\vec{L}$  dado en (3.10). Como hemos visto, esto conduce a las expresiones (3.12) y (3.13) para los modos TE y TM respectivamente.

Para los modos TE, las condiciones de contorno (3.7) implican

$$\begin{aligned} f_l(r = a^+) &= f_l(r = a^-), \\ \frac{1}{\mu_2} \partial_r [r f_l(r)] \Big|_{r=a^+} &= \frac{1}{\mu_1} \partial_r [r f_l(r)] \Big|_{r=a^-}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Para los modos TM, las mismas condiciones conducen a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_2} g_l(r = a^+) &= \frac{1}{\mu_1} g_l(r = a^-), \\ \frac{1}{\mu_2 \epsilon_2} \partial_r [r g_l(r)] \Big|_{r=a^+} &= \frac{1}{\mu_1 \epsilon_1} \partial_r [r g_l(r)] \Big|_{r=a^-}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Luego, por ejemplo, para  $f_l(r)$  tenemos

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} [r f_l(r)] - \frac{l(l+1)}{r^2} f_l(r) = -\mu_{1,2} \epsilon_{1,2} \frac{\omega^2}{c^2} f_l(r), \text{ para } r \neq a. \quad (5.5)$$

Esta ecuación, junto con las condiciones de contorno (5.3), implica que  $f_l(r)$  es una función continua y derivable a trozos, que presenta una discontinuidad en su derivada primera en  $r = a$ .

Para lograr un espectro discreto, encerramos al sistema dentro de una gran esfera conductora concéntrica de radio  $R \gg a$ , imponiendo en consecuencia la condición de Dirichlet,  $f_l(r) = 0$  en  $r = R$ , para las funciones en el dominio del operador diferencial considerado. Al final del cálculo tomaremos el límite  $R \rightarrow \infty$ .

En el Apéndice C, mostramos que las autofrecuencias correspondientes a los modos TE se determinan como los ceros de la función

$$\begin{aligned} \Delta_{l+1/2}^{TE}(a\omega/c) &\equiv \Delta_{l+1/2}^{TE}(z) := \\ &= \mathcal{J}_{l+1/2}(\bar{z}_1) \left\{ \mathcal{Y}_{l+1/2}(\bar{z}_0) \mathcal{J}'_{l+1/2}(\bar{z}_2) - \mathcal{J}_{l+1/2}(\bar{z}_0) \mathcal{Y}'_{l+1/2}(\bar{z}_2) \right\} - \\ &- \xi \mathcal{J}'_{l+1/2}(\bar{z}_1) \left\{ \mathcal{Y}_{l+1/2}(\bar{z}_0) \mathcal{J}_{l+1/2}(\bar{z}_2) - \mathcal{J}_{l+1/2}(\bar{z}_0) \mathcal{Y}_{l+1/2}(\bar{z}_2) \right\}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{l+1/2}(w) &= w j_l(w) = \sqrt{\frac{\pi w}{2}} J_{l+1/2}(w) \\ \mathcal{Y}_{l+1/2}(w) &= w y_l(w) = \sqrt{\frac{\pi w}{2}} Y_{l+1/2}(w) \end{aligned} \quad (5.7)$$

son las funciones de Riccati - Bessel. En (5.6),  $z = a(\omega/c)$ ,  $\bar{z}_{1,2} = z\sqrt{\epsilon_{1,2}\mu_{1,2}}$ ,  $\bar{z}_0 = z\frac{R}{a}\sqrt{\epsilon_2\mu_2}$ , y  $\xi = \sqrt{\frac{\epsilon_1\mu_2}{\epsilon_2\mu_1}}$ . En el mismo apéndice mostramos que los ceros que la función  $\Delta_{l+1/2}^{TE}(z)$  tiene en el semiplano abierto derecho de la variable  $z$  son reales y simples.

Para los modos TM, el mismo análisis puede hacerse para la función  $\bar{g}_l(r) := \frac{1}{\mu} g_l(r)$ , definida para  $r \neq a$ , que satisface la condición de contorno de Neumann,  $\bar{g}'_l(r) = 0$ , para  $r = R$ . En este caso, las autofrecuencias vienen dadas por los ceros de la función

$$\begin{aligned} \Delta_{l+1/2}^{TM}(a\omega/c) &\equiv \Delta_{l+1/2}^{TM}(z) := \\ &= \mathcal{J}_{l+1/2}(\bar{z}_1) \left\{ \mathcal{Y}'_{l+1/2}(\bar{z}_2) \mathcal{J}'_{l+1/2}(\bar{z}_0) - \mathcal{J}'_{l+1/2}(\bar{z}_2) \mathcal{Y}'_{l+1/2}(\bar{z}_0) \right\} - \\ &- \frac{1}{\xi} \mathcal{J}'_{l+1/2}(\bar{z}_1) \left\{ \mathcal{Y}_{l+1/2}(\bar{z}_2) \mathcal{J}'_{l+1/2}(\bar{z}_0) - \mathcal{J}_{l+1/2}(\bar{z}_2) \mathcal{Y}'_{l+1/2}(\bar{z}_0) \right\} \end{aligned} \quad (5.8)$$

contenidos en el semiplano abierto derecho de la variable  $z$ , los que también son reales y simples.

Para simplificar el cálculo, en lo que sigue consideraremos ambos medios como no magnéticos ( $\mu_1 = 1 = \mu_2$  para todas las frecuencias), mientras que mantendremos  $\sqrt{\epsilon_1} = n_1$  y  $\sqrt{\epsilon_2} = n_2$  arbitrarios para  $\omega \leq \Omega$ .

### 5.2.2. La energía de vacío y la función $\zeta$ incompleta

En esta sección nuestro objetivo es evaluar la contribución de los modos del campo con frecuencia  $\omega \leq \Omega$  a la energía de Casimir de una burbuja dieléctrica esférica inmersa en un segundo medio. En particular, estamos interesados en calcular *diferencias* entre las energías de vacío correspondientes a situaciones que difieren en el valor del radio de la burbuja,  $a$ . Luego, podemos descartar las contribuciones de aquellos modos con frecuencias  $\omega > \Omega$ , pues se cancelan al ser independientes de la posición del contorno, cualquiera que sea la regularización usada en la definición de la energía de vacío. Esta sustracción de una cantidad independiente de  $a$  es equivalente a una redefinición del nivel de referencia de la energía.

Luego, para los modos TE debemos evaluar la suma (finita)

$$E^{TE}(a) = \sum_{\nu=3/2}^{\nu_0} 2\nu \sum_{n=1}^{N_\nu} \frac{1}{2} \hbar \omega_{\nu,n} = \frac{\hbar c}{a} \sum_{\nu=3/2}^{\nu_0} \nu \sum_{n=1}^{N_\nu} z_{\nu,n}, \quad (5.9)$$

y una expresión similar para los modos TM.

En (5.9),  $N_\nu$  es el número de ceros positivos de  $\Delta_\nu^{TE}(z)$ ,  $z_{\nu,n}$ , que son menores o iguales a  $x = a\Omega/c$ . La degeneración, debida a la simetría esférica, es  $2\nu = 2l + 1$  y  $\nu_0$  es el máximo valor de  $\nu$  para el cual  $N_\nu \geq 1$ .

Estamos interesados en una evaluación analítica, antes que numérica, de (5.9). Luego, aunque se trata de una suma finita, utilizaremos el método de suma desarrollado en el capítulo 4 [76], basado en la evaluación de una función  $\zeta$  *incompleta*. Podemos usar la siguiente representación

$$\sum_{n=1}^{N_\nu} z_{\nu,n} = \sum_{n=1}^{N_\nu} z_{\nu,n}^{-s} \Big|_{s=-1}, \quad (5.10)$$

donde la suma en el lado derecho existe como una función analítica de  $s \in \mathbb{C}$ . Notar que esta suma evaluada en  $s = 0$  da  $N_\nu$ , que es el número de ceros de  $\Delta_\nu^{TE}(z)$  que contribuyen a la energía de vacío del campo para cada valor del momento angular  $l = \nu - 1/2$ .

Como  $\Delta_\nu^{TE}(z)$  tiene sólo ceros reales en el semiplano abierto derecho de la variable compleja  $z$ , y sus ceros no nulos son todos simples (ver el apéndice C), podemos utilizar el teorema de Cauchy para representar la suma en el lado derecho de (5.10) como una integral sobre el plano complejo,

$$\sum_{n=1}^{N_\nu} z_{\nu,n}^{-s} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C z^{-s} \frac{\Delta_\nu^{TE'}(z)}{\Delta_\nu^{TE}(z)} dz, \quad (5.11)$$

donde la curva  $C$ , recorrida en sentido antihorario, encierra los primeros  $N_\nu$  ceros positivos de  $\Delta_\nu^{TE}(z)$ .

Para  $\mathcal{R}(s)$  suficientemente grande, el contorno  $C$  puede deformarse en dos líneas rectas verticales, una cruzando el eje horizontal en  $\mathcal{R}(z) = x^+$  y la otra en  $\mathcal{R}(z) = 0^+$ .

En efecto, el integrando se puede expresar en términos de las funciones de Bessel modificadas por medio de las sustituciones de la ecuación (3.23) [69], relaciones válidas para  $-\pi < \arg(w) \leq \pi/2$ . Así, la ecuación (5.6) queda

$$\begin{aligned} \Delta_\nu^{TE}(x + iy) = -e^{\frac{i\pi}{2}(\nu + 1/2)} \sqrt{\frac{n_1 \pi R}{2a}} v^{\frac{3}{2}} \\ \left\{ K_\nu\left(\frac{n_2 R v}{a}\right) (-n_1 I_\nu(n_2 v) I'_\nu(n_1 v) + n_2 I_\nu(n_1 v) I'_\nu(n_2 v)) + \right. \\ \left. + I_\nu\left(\frac{n_2 R v}{a}\right) (n_1 K_\nu(n_2 v) I'_\nu(n_1 v) - n_2 I_\nu(n_1 v) K'_\nu(n_2 v)) \right\}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

donde  $v = (-ix + y)$ . Teniendo en cuenta el comportamiento asintótico de las funciones de Bessel modificadas para grandes argumentos [69], es fácil ver que, para  $0 < x (\neq z_{\nu,n}, \forall n)$ , la integral

$$\zeta_\nu^{TE}(s, x) := \frac{-1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} z^{-s} \frac{\Delta_\nu^{TE'}(z)}{\Delta_\nu^{TE}(z)} dz, \quad (5.13)$$

converge absoluta y uniformemente a una función analítica en el semiplano abierto  $\Re(s) > 1$ . Sin perder generalidad, y por conveniencia de cálculo, nos restringiremos a valores reales de  $s$ , y evaluaremos la función (5.13) sobre la línea  $s > 1$ , donde define una función analítica que se extiende como una función meromorfa a todo el plano complejo  $s$ .

Luego, para  $s > 1$ ,

$$\sum_{n=1}^{N_\nu} z_{\nu,n}^{-s} = \zeta_\nu^{TE}(s, 0^+) - \zeta_\nu^{TE}(s, x). \quad (5.14)$$

Además, como el lado izquierdo de (5.14) es una función entera de  $s$ , las singularidades de  $\zeta_\nu^{TE}(s, x)$  deben ser independientes de  $x$ . En particular, esto nos permite escribir la energía de vacío como la continuación analítica

$$E^{TE}(a) = \frac{\hbar c}{a} \sum_{\nu=3/2}^{\nu_0} \nu \left[ \zeta_\nu^{TE}(s, 0^+) - \zeta_\nu^{TE}(s, x) \right] \Big|_{s \rightarrow -1}. \quad (5.15)$$

Para los modos TM tenemos expresiones completamente similares.

Por otro lado, tenemos las relaciones entre funciones de Bessel modificadas reseñadas en la Ec. (3.25) [69]. Entonces, efectuando en (5.13) el cambio de variables  $z \rightarrow (y - i) x$ , y llamando  $t = (y - i) x / \nu$ , podemos escribir de manera directa para  $s > 1$

$$\zeta_\nu^{TE}(s, x) = \Re \left\{ \frac{-\nu^{-s}}{\pi} e^{-i\frac{\pi}{2}(s+1)} \int_{-iz}^{\infty-iz} t^{-s} \frac{d(\ln \Delta_\nu^{TE}(i\nu t))}{dt} dt \right\}, \quad (5.16)$$

donde hemos llamado  $z = x/\nu > 0$ .

Para  $\zeta_\nu^{TM}(s, x)$ , correspondiente a los modos TM, se obtiene una expresión enteramente similar.

### 5.2.3. Continuación analítica de la función $\zeta$ incompleta

Para determinar la continuación analítica de  $\zeta_\nu(s, x)$  a  $s \simeq -1$ , restaremos y sumaremos al integrando en el dado derecho de (5.16) los primeros términos obtenidos del desarrollo asintótico uniforme (desarrollo de Debye) [69] de las funciones de Bessel que aparecen en la expresión de  $\Delta_\nu^{TE}(z)$  (ver ecuación (5.12)), válido para grandes valores de  $\nu$  con  $t$  fijo. Como veremos, esto nos permitirá identificar las diferentes contribuciones (de volumen, superficie, etc) para cada orden de este desarrollo asintótico. Tenemos:

$$\frac{d \ln \Delta_\nu^{TE}(\nu t)}{d t} = D_\nu^{TE}(t) + \mathcal{O}(\nu^{-2}), \quad (5.17)$$

donde

$$\begin{aligned} D_\nu^{TE}(t) &= \nu D_{TE}^{(1)}(t) + D_{TE}^{(0)}(t) + \nu^{-1} D_{TE}^{(-1)}(t) = \\ &= \frac{\nu}{t} \left( \sqrt{1 + n_1^2 t^2} - \sqrt{1 + n_2^2 t^2} + \sqrt{1 + \frac{n_2^2 R^2 t^2}{a^2}} \right) + \\ &+ \frac{1}{2t} \left( \frac{1}{1 + n_1^2 t^2} + \frac{1}{1 + n_2^2 t^2} - \frac{2}{\sqrt{1 + n_1^2 t^2} \sqrt{1 + n_2^2 t^2}} + \frac{a^2}{a^2 + n_2^2 R^2 t^2} \right) + \\ &+ \frac{a^2 n_2^2 R^2 t (4a^2 - n_2^2 R^2 t^2) \sqrt{1 + \frac{n_2^2 R^2 t^2}{a^2}}}{8\nu (a^2 + n_2^2 R^2 t^2)^3} - \\ &- \frac{t (-8n_2^2 + n_1^4 t^2 (-3 - 10n_2^2 t^2 + n_2^4 t^4) - 4n_1^2 (2 + 7n_2^2 t^2 + n_2^4 t^4))}{8\nu (1 + n_1^2 t^2)^{\frac{5}{2}} (1 + n_2^2 t^2)^2} + \\ &+ \frac{t (n_1^4 n_2^2 t^4 (-4 + n_2^2 t^2) - n_2^2 (8 + 3n_2^2 t^2) - 2n_1^2 (4 + 14n_2^2 t^2 + 5n_2^4 t^4))}{8\nu (1 + n_1^2 t^2)^2 (1 + n_2^2 t^2)^{\frac{5}{2}}}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

En (5.18) hemos descartado contribuciones que vienen de términos que contienen  $K_\nu(\frac{n_2 R \nu t}{a})$  o su derivada (ver (5.12)), porque ellos se anulan exponencialmente cuando  $R \rightarrow \infty$ .

Luego, debemos considerar la integral

$$\begin{aligned} &\int_{-iz}^{\infty - iz} t^{-s} \frac{d (\ln \Delta_\nu^{TE}(\nu t))}{d t} dt = \\ &\int_{-iz}^{\infty - iz} t^{-s} D_\nu^{TE}(t) dt + \int_{-iz}^{\infty - iz} t^{-s} \left\{ \frac{d (\ln \Delta_\nu^{TE}(\nu t))}{d t} - D_\nu^{TE}(t) \right\} dt. \end{aligned} \quad (5.19)$$

La segunda integral en el lado derecho de (5.19) converge para  $s > -2$ . Esto se ve de manera directa ya que el integrando puede ser estimado por medio de la contribución del siguiente orden,  $\mathcal{O}(\nu^{-2})$ , en el desarrollo de Debye (ver (5.17)), que se comporta como  $\mathcal{O}(t^{-s-3})$  para grandes valores de  $|t|$ . Luego, este término podría evaluarse directamente (numéricamente, por ejemplo) en  $s = -1$ . Pero aquí nos ocuparemos del primer término del lado derecho de (5.19).

Para los modos TM, un cálculo similar conduce al siguiente desarrollo

$$\begin{aligned}
D_{\nu}^{TM}(t) &= \nu D_{TM}^{(1)}(t) + D_{TM}^{(0)}(t) + \nu^{-1} D_{TM}^{(-1)}(t) = \\
&= \frac{\nu}{t} \left( \sqrt{1 + n_1^2 t^2} - \sqrt{1 + n_2^2 t^2} + \sqrt{1 + \frac{n_2^2 R^2 t^2}{a^2}} \right) + \\
&+ \left( \frac{n_1^2 n_2^2 t}{\sqrt{1 + n_1^2 t^2} \sqrt{1 + n_2^2 t^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_1^2 n_2^2 t^2)} - \right. \\
&- \frac{n_2^2 + 2 n_2^4 t^2 + n_2^6 (R/a)^2 t^4}{2 t (1 + n_1^2 t^2) (1 + n_2^2 t^2) (n_1^2 + n_2^2 + n_1^2 n_2^2 t^2) (1 + n_2^2 (R/a)^2 t^2)} - \\
&- \frac{n_1^4 t^2 (1 + n_2^2 t^2) (2 + n_2^2 (1 + (R/a)^2) t^2)}{2 t (1 + n_1^2 t^2) (1 + n_2^2 t^2) (n_1^2 + n_2^2 + n_1^2 n_2^2 t^2) (1 + n_2^2 (R/a)^2 t^2)} - \\
&- \left. \frac{n_1^2 (1 + 3 n_2^2 t^2 + 3 n_2^4 t^4 + n_2^6 (R/a)^2 t^6)}{2 t (1 + n_1^2 t^2) (1 + n_2^2 t^2) (n_1^2 + n_2^2 + n_1^2 n_2^2 t^2) (1 + n_2^2 (R/a)^2 t^2)} \right) + \\
&+ \frac{1}{\nu} \left\{ \frac{-(n_2^2 R^2 t (8 a^2 + n_2^2 R^2 t^2))}{8 a^4 \left(1 + \frac{n_2^2 R^2 t^2}{a^2}\right)^{\frac{5}{2}}} \right. \\
&+ \left( n_2^2 t \left( -4 n_2^4 + n_2^6 t^2 + n_1^8 t^4 (1 + n_2^2 t^2)^2 (8 + n_2^2 t^2) \right. \right. \\
&- 2 n_1^2 n_2^2 (6 + 11 n_2^2 t^2) + 2 n_1^6 t^2 (1 + n_2^2 t^2) (8 + 13 n_2^2 t^2 + 8 n_2^4 t^4) + \\
&\left. \left. n_1^4 n_2^2 t^2 (-3 + 6 n_2^2 t^2 + 14 n_2^4 t^4) \right) \right) / \\
&\left( 8 (1 + n_1^2 t^2)^2 (1 + n_2^2 t^2)^{\frac{5}{2}} (n_1^2 + n_2^2 + n_1^2 n_2^2 t^2)^2 \right) - \\
&- (n_1^2 t (8 n_2^6 t^2 (2 + n_2^2 t^2) + \\
&+ n_1^2 n_2^2 (-12 - 3 n_2^2 t^2 + 42 n_2^4 t^4 + 17 n_2^6 t^6) + \\
&+ n_1^6 (t^2 + 14 n_2^4 t^6 + 16 n_2^6 t^8 + n_2^8 t^{10}) +
\end{aligned}
\tag{5.20}$$



$$+2 n_1^4 (-2 + n_2^2 t^2 (-11 + 3 n_2^2 t^2 + 21 n_2^4 t^4 + 5 n_2^6 t^6))) /$$

$$\left( 8 (1 + n_1^2 t^2)^{\frac{5}{2}} (1 + n_2^2 t^2)^2 (n_1^2 + n_2^2 + n_1^2 n_2^2 t^2)^2 \right) \Big\},$$

que permite una descomposición similar a (5.19). Aquí también hemos descartado aquellas contribuciones que se anulan exponencialmente cuando  $R \rightarrow \infty$ , provenientes de términos que contienen  $K_\nu(\frac{n_2 R \nu t}{a})$  en  $\Delta_\nu^{TM}(z)$ .

En lo que sigue, evaluaremos sólo la primera integral del lado derecho de (5.19) (y la expresión análoga para los modos TM), y retendremos sólo aquellos términos de su desarrollo en potencias de  $\nu^{-1}$  que sean consistentes con la aproximación hecha en (5.17). Esto es, retendremos términos hasta el orden  $\nu^{-1}$  inclusive.

Notar que el integrando  $D_\nu^{TE}(t)$  (o  $D_\nu^{TM}(t)$  para los modos TM), es una función algebraica de  $t$  que se comporta como  $\mathcal{O}(t^0)$  para grandes valores de  $|t|$ . Luego, la integral converge absoluta y uniformemente para  $s > 1$ , donde define una función analítica que puede ser extendida como una función meromorfa en la región de interés del parámetro  $s$ . Como veremos, esta continuación analítica nos conducirá a las singularidades de  $\zeta_\nu^{TE}(s, x)$  ( $\zeta_\nu^{TM}(s, x)$  para los modos TM), que se presentarán como polos simples cuyos residuos serán independientes de  $x$ , una condición necesaria para lograr un resultado finito en (5.14) para cualquier valor de  $s$ . Notar que esto último debe ser válido para *cada una* de las contribuciones provenientes de cada orden en  $\nu$  del desarrollo de Debye.

Comenzamos el cálculo considerando los términos dominantes en el desarrollo de Debye. Para los modos TE, este orden es  $\nu D_{TE}^{(1)}(t)$ . Como  $D_{TM}^{(1)}(t)$  para los modos TM es idéntico a  $D_{TE}^{(1)}(t)$  (ver (5.18) y (5.20)), el mismo resultado se obtendrá para la contribución dominante a  $\zeta_\nu^{TM}(s, x)$ .

En virtud de la analiticidad del integrando (primer término en el lado derecho de (5.18)), para  $s > 1$  podemos deformar el camino de integración y escribir

$$\int_{-iz}^{\infty - iz} t^{-s} \nu D_{TE}^{(1)}(t) dt =$$

$$= \nu \int_{-iz}^1 t^{-s-1} \left( \sqrt{1 + n_1^2 t^2} - \sqrt{1 + n_2^2 t^2} + \sqrt{1 + \frac{n_2^2 R^2 t^2}{a^2}} \right) dt +$$

$$+ \nu \int_1^\infty t^{-s} \left[ \frac{1}{t} \left( \sqrt{1 + n_1^2 t^2} - \sqrt{1 + n_2^2 t^2} + \sqrt{1 + \frac{n_2^2 R^2 t^2}{a^2}} \right) - \right. \quad (5.21)$$

$$\left. - \left( n_1 - n_2 + \frac{n_2 R}{a} + \frac{\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} + \frac{a}{n_2 R}}{2 t^2} \right) \right] dt +$$

$$\nu \int_1^\infty t^{-s} \left( n_1 - n_2 + \frac{n_2 R}{a} + \frac{\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} + \frac{a}{n_2 R}}{2 t^2} \right) dt,$$

La primera integral en el lado derecho de (5.21), que contiene toda la dependencia en  $x = \nu z$ , es una función entera de  $s$  y luego puede ser evaluada directamente en el valor requerido de ese parámetro. En la integral sobre la línea  $(1, \infty)$ , hemos sumado y restado los primeros términos del desarrollo en serie de  $D_{TE}^{(1)}(t)$  para grandes valores de  $t$ , lo cual hace convergente a esta segunda integral para  $s > -2$ . La tercera integral debe ser evaluada para  $s > 1$  y luego prolongada analíticamente a los valores requeridos de  $s$ . Esto puede ser hecho exactamente, y su contribución a  $\zeta_\nu^{TE}(s, x)$  en (5.16) es

$$\begin{aligned} \Delta_1 \zeta_\nu^{TE}(s, x)|_{Sing.} = & \frac{\nu^{1-s} \cos\left(\frac{\pi}{2}(1+s)\right)}{2 a n_1 n_2 \pi R} \times \\ & \left( \frac{2 n_1 n_2 R (a n_1 - a n_2 + n_2 R)}{1-s} + \frac{-(a^2 n_1) + a n_1 R - a n_2 R}{1+s} \right) \end{aligned} \quad (5.22)$$

Esta expresión es analítica en  $s = 0$  y tiene polos simples en  $s = \pm 1$ , donde se encuentran las únicas singularidades con  $\Re(s) > -2$  de la contribución dominante a  $\zeta_\nu^{TE}(s, x)$  en esta aproximación. En particular, su residuo en  $s = -1$  es

$$\text{Res} \Delta_1 \zeta_\nu^{TE}(s, x)|_{s=-1} = -\frac{\nu^2 (a n_1 + (n_2 - n_1)R)}{2 n_1 n_2 \pi R}. \quad (5.23)$$

Notar que, como habíamos anticipado, hasta este orden en el desarrollo de Debye el residuo es independiente de  $x$ .

Por ejemplo, para la contribución dominante a  $\zeta_\nu^{TE}(s, x)$  (que, a este orden, coincide con la contribución correspondiente a  $\zeta_\nu^{TM}(s, x)$ ),

$$\zeta_\nu^{TE}(s, x) = \Delta_1 \zeta_\nu^{TE}(s, x) (1 + \mathcal{O}(\nu^{-1})), \quad (5.24)$$

se puede obtener de manera directa el desarrollo de Laurent alrededor de  $s = -1$

$$\Delta_1 \zeta_\nu^{TE}(s, x) = \Delta_1 \zeta_\nu^{TM}(s, x) = -\frac{\nu^2 (a n_1 + (n_2 - n_1) R)}{2 n_1 n_2 \pi R (s+1)} +$$

$$\begin{aligned}
& + \Re \left\{ \frac{-\nu^2}{4 n_1 n_2 \pi R} \left( a n_1 + R(n_2 - n_1)(1 - 2n_1 n_2) + 2n_1 n_2 R \times \right. \right. \\
& \left. \left[ n_2 R + i a z \left( \sqrt{1 + e^{-i\pi} n_1^2 z^2} - \sqrt{1 + e^{-i\pi} n_2^2 z^2} + \sqrt{1 + \frac{e^{-i\pi} n_2^2 R^2 z^2}{a^2}} \right) \right] + \right. \\
& 2 \log(2) (a n_1 \log(n_2 R) - n_1 R \log(n_2) + n_2 R \log(n_1)) + (n_2 - n_1)(2n_2 n_1) R - \\
& - 2n_2^2 n_1 \frac{R^2}{a} - 2(a n_1 + (n_2 - n_1) R) \log(\nu) - \\
& - 2n_2 R \log(-i n_1 z + \sqrt{1 + e^{-i\pi} n_1^2 z^2}) + \\
& + 2n_1 R \log(-i n_2 z + \sqrt{1 + e^{-i\pi} n_2^2 z^2}) - \\
& \left. \left. - 2a n_2 \log \left( -i n_2 z + a \sqrt{1 + \frac{e^{-i\pi} n_2^2 R^2 z^2}{a^2}} \right) \right) \right\} \\
& + \mathcal{O}(s + 1).
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Por otro lado, un cálculo similar para  $x \rightarrow 0^+$  lleva a

$$\begin{aligned}
\Delta_1 \zeta_\nu^{TE}(s, x = 0^+) &= \Delta_1 \zeta_\nu^{TM}(s, x = 0^+) = -\frac{\nu^2 (a n_1 + (n_2 - n_1) R)}{2 n_1 n_2 \pi R (s + 1)} + \\
& + \frac{\nu^2}{4 n_1 n_2 \pi} (2 n_1 \log(n_2) - 2 n_2 \log(n_1) + (n_1 - n_2) (1 - 2 \log(\nu))) + \\
& + \mathcal{O}(s + 1).
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Se requieren cálculos similares para obtener las contribuciones a  $\zeta_\nu^{TE}(s, x)$  y  $\zeta_\nu^{TM}(s, x)$  provenientes de los sucesivos órdenes en (5.18) y (5.20) respectivamente. En efecto, del segundo término del lado derecho de (5.18) ((5.20)), es fácil ver que  $D_{TE}^{(0)}(t)$  ( $D_{TM}^{(0)}(t)$ )  $\sim t^{-3}$ . Luego, su contribución a la primera integral del lado derecho de (5.19) (o el equivalente para TM) converge a una función analítica para  $s > -2$ , y no afecta el residuo de  $\zeta_\nu^{TE}(s, x)$  ( $\zeta_\nu^{TM}(s, x)$ ) en  $s = -1$ .

Para el término de segundo orden en el desarrollo de Debye de la diferencia

$[\zeta_\nu^{TE}(s, x = 0^+) - \zeta_\nu^{TE}(s, x)]$  alrededor de  $s = -1$ , un cálculo directo lleva a

$$\begin{aligned}
& \Delta_0 \zeta_\nu^{TE}(s, 0^+) - \Delta_0 \zeta_\nu^{TE}(s, x) = \\
& = \nu \left\{ -\frac{1}{4n_1} \Theta(n_1 x - \nu) - \frac{1}{4n_2} \Theta(n_2 x - \nu) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{a}{4n_2 R} \Theta(n_2 R x / a - \nu) + \frac{2}{\pi(n_{>} + n_{<})} \Theta(\nu_{>} - \nu) \times \right. \\
& \quad \left. F \left( \arcsin \sqrt{\frac{(n_{>} + n_{<})(\nu_{>} - u)}{(n_{>} - n_{<})(\nu_{>} + u)}, \frac{(n_{>} - n_{<})}{(n_{>} + n_{<})} \right) \right\} + \\
& \quad + \mathcal{O}(s + 1).
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Aquí,  $\Theta(w)$  es la función escalón, que se anula para  $w < 0$  y es igual a 1 para  $w > 0$ ,  $F(\varphi, k)$  es la integral elíptica de primera clase [69],  $n_{<}$  ( $n_{>}$ ) es el menor (mayor) entre  $\{n_1, n_2\}$ , y  $u$  es el mayor entre  $\{\nu, \nu_{<}\}$ , donde estamos llamando  $\nu_{<} = n_{<} x$  y  $\nu_{>} = n_{>} x$ .

De manera similar, para los modos TM obtenemos

$$\begin{aligned}
& \Delta_0 \zeta_\nu^{TM}(s, 0^+) - \Delta_0 \zeta_\nu^{TM}(s, x) = \\
& = \nu \left\{ -\frac{1}{4n_1} \Theta(n_1 x - \nu) - \frac{1}{4n_2} \Theta(n_2 x - \nu) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{a}{4n_2 R} \Theta(n_2 R x / a - \nu) + \frac{n_{<}^2}{\pi n_{>}^3} \Theta(\nu_{>} - \nu) \times \right. \\
& \quad \left. \Pi \left( \arcsin \sqrt{\frac{(\nu_{>}^2 - u^2)}{(\nu_{>}^2 + \nu_{<}^2)}}, 1 - \frac{n_{<}^4}{n_{>}^4}, \sqrt{1 - \frac{n_{<}^2}{n_{>}^2}} \right) \right\} + \mathcal{O}(s + 1),
\end{aligned} \tag{5.28}$$

donde  $\Pi(\varphi, n, k)$  es la integral elíptica de tercera clase [69] y  $u$  es el mayor entre  $\{\nu, \nu_{<}\}$ .

Finalmente, para el último orden, notar que  $D_{TE}^{(-1)}(t)$  ( $D_{TM}^{(-1)}(t)$ )  $\sim t^{-2}$ . Luego, estos términos dan una contribución a los polos en  $s = -1$ . Tenemos

$$\begin{aligned}
& \Delta_{-1} \zeta_\nu^{TE}(s, x) = \Delta_{-1} \zeta_\nu^{TM}(s, x) = \\
& = \frac{n_1 - n_2}{8n_1 n_2 \pi (s + 1)} - \frac{a}{8n_2 \pi R (s + 1)} + \mathcal{O}(s + 1)^0,
\end{aligned} \tag{5.29}$$

aunque las partes finitas son diferentes para los modos  $TE$  y  $TM$ . Notar que los residuos son independientes de  $x$ , y se cancelan cuando se toma la diferencia en (5.14) (o su equivalente para el caso TM).

En la siguiente sección evaluaremos  $N_\nu$ , esto es, el número de modos que dan una contribución a (5.14), para cada valor de  $\nu$ .

### 5.3. El número de modos que contribuyen

Esta sección está dedicada a la determinación de  $\nu_0$ , en la ecuación (5.9), o sea, el máximo valor de  $\nu$  para el cual  $N_\nu \geq 1$ . Para ello seguiremos el método establecido en el capítulo 4 [76].

En primer lugar, notamos que

$$N_\nu(x) = \sum_{n=1}^{N_\nu} z_{\nu,n}^{-s} \Big|_{s=0} = [\zeta_\nu(s, 0^+) - \zeta_\nu(s, x)] \Big|_{s=0} \quad (5.30)$$

es una función escalonada de  $x$ , que presenta una discontinuidad de altura 1 en cada cero positivo  $z_{\nu,n}$  de la función  $\Delta_\nu^{TE}(z)$  en la ecuación (5.6). Luego, se puede determinar  $\nu_0(x)$  de la condición

$$N_{\nu_0}(x) = N_{\nu_0}(z_{\nu_0,1} + 0) = 1, \quad (5.31)$$

con  $N_{\nu_0}(z_{\nu_0,1} - 0) = 0$ .

Para el orden dominante de  $D_\nu^{TE}(t)$ , primer término en el lado derecho de (5.18), teniendo en cuenta la ecuación (5.22) y el hecho de que la segunda integral en el lado derecho de (5.21) es finita y real en  $s = 0$ , es directo obtener de las ecuaciones (5.16) y (5.21), que

$$\begin{aligned} \Delta_1 \zeta_\nu^{TE}(s=0, x) = & -\frac{\nu}{2} - \Re \left\{ \frac{i\nu}{\pi} \left( \sqrt{1 + e^{-i\pi} n_1^2 z^2} - \sqrt{1 + e^{-i\pi} n_2^2 z^2} \right. \right. \\ & - \log \left( 1 + \sqrt{1 + e^{-i\pi} n_1^2 z^2} \right) + \log \left( 1 + \sqrt{1 + e^{-i\pi} n_2^2 z^2} \right) \\ & \left. \left. + \sqrt{1 + \frac{e^{-i\pi} n_2^2 R^2 z^2}{a^2}} - \log \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{e^{-i\pi} n_2^2 R^2 z^2}{a^2}} \right) \right) \right\} \end{aligned} \quad (5.32)$$

En particular, para  $x \rightarrow 0^+$ ,

$$\Delta_1 \zeta_\nu^{TE}(s=0, x=0^+) = -\frac{\nu}{2}. \quad (5.33)$$

De manera similar, para el siguiente orden, un cálculo directo lleva a

$$\begin{aligned} & \Delta_0 \zeta_\nu^{TE}(s=0, x=0^+) - \Delta_0 \zeta_\nu^{TE}(s=0, x) = \\ & = \Re \left\{ \frac{-i}{4\pi} [\log(1 + e^{-i\pi} n_1^2 z^2) + \log(1 + e^{-i\pi} n_2^2 z^2) + \right. \\ & \quad \left. \log(a^2 + e^{-i\pi} n_2^2 R^2 z^2)] \right\}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Ahora, llamando

$$\begin{aligned}\tilde{N}_\nu^{TE}(x) &= \Delta_1 \zeta_\nu^{TE}(s=0, x=0^+) - \Delta_1 \zeta_\nu^{TE}(s=0, x) + \\ &+ \Delta_0 \zeta_\nu^{TE}(s=0, x=0^+) - \Delta_0 \zeta_\nu^{TE}(s=0, x) = \\ &N_\nu(x) + \mathcal{O}(\nu^{-1}),\end{aligned}\tag{5.35}$$

vemos que tenemos una aproximación *suave* a la función escalón  $N_\nu(x)$  de la ecuación (5.30), válida para  $\nu \gg 1$ . Luego, siguiendo los pasos indicados en el capítulo 4, aproximaremos  $\nu_0(x)$  por el valor de  $\nu$  para el cual  $\tilde{N}_\nu^{TE}(x) = 1/2$ .

Como  $z = x/\nu$  (con  $x = a\Omega/c$ ), se puede ver fácilmente que  $\tilde{N}_\nu^{TE}(x) = 0$  para  $\nu > \frac{n_2 R x}{a}$  (lo cual implica  $1 > \frac{n_2 R z}{a} > n_{1,2} z$ ), mientras que para  $\frac{n_2 R x}{a} > \nu > n_{1,2} x$  tenemos

$$\tilde{N}_\nu^{TE}(x) = \frac{\nu \sqrt{-1 + \frac{n_2^2 R^2 z^2}{a^2}}}{\pi} - \frac{\nu \arctan \left( \sqrt{-1 + \frac{n_2^2 R^2 z^2}{a^2}} \right)}{\pi} - \frac{1}{4}.\tag{5.36}$$

Ahora, supondremos que  $\tilde{N}_{\nu_0}^{TE}(x) = 1/2$  para  $\nu_0 \lesssim \frac{n_2 R x}{a}$ . Escribiendo  $\varepsilon^2 = \frac{n_2^2 R^2 x^2}{\nu_0^2 a^2} - 1$ , determinaremos  $\varepsilon$  iterativamente a partir del desarrollo en serie del lado derecho de la ecuación (5.36) alrededor de  $\varepsilon = 0$ . Esto conduce a

$$\begin{aligned}\nu_0^{TE} &= \frac{n_2 R \Omega}{c} \left\{ 1 - k_1^{TE} \left( \frac{n_2 R \Omega}{c} \right)^{-2/3} + k_2^{TE} \left( \frac{n_2 R \Omega}{c} \right)^{-4/3} + \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{O} \left( \left( \frac{R \Omega}{c} \right)^2 \right) \right\},\end{aligned}\tag{5.37}$$

donde

$$k_1^{TE} = 3^{1/3} \frac{3\pi^{2/3}}{42^{1/3}}, \quad k_2^{TE} = 3^{2/3} \frac{3\pi^{4/3}}{1602^{2/3}}.\tag{5.38}$$

Notar que estos resultados no dependen del radio de la burbuja  $a$  ni del índice de refracción del medio interno  $n_1$ .

Para los modos TM, un cálculo similar muestra que  $\tilde{N}_\nu^{TM}(x) = \tilde{N}_\nu^{TE}(x) + 1/2$ , y

$$\begin{aligned}\nu_0^{TM} &= \frac{n_2 R \Omega}{c} \left\{ 1 - k_1^{TM} \left( \frac{n_2 R \Omega}{c} \right)^{-2/3} + k_2^{TM} \left( \frac{n_2 R \Omega}{c} \right)^{-4/3} + \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{O} \left( \left( \frac{R \Omega}{c} \right)^2 \right) \right\},\end{aligned}\tag{5.39}$$

donde

$$k_1^{TM} = 3^{-1/3} \frac{3\pi^{2/3}}{42^{1/3}}, \quad k_2^{TM} = 3^{-2/3} \frac{3\pi^{4/3}}{1602^{2/3}}.\tag{5.40}$$

$\nu_0^{TM}$  también es independiente de  $a$  y de  $n_1$ .

## 5.4. Las contribuciones dominantes a la energía de vacío

En esta sección evaluaremos la contribución a la energía de vacío debida a los órdenes dominantes en el desarrollo de Debye de las funciones  $\zeta$  incompletas obtenidas en la sección 5.2.

### 5.4.1. Contribuciones de volumen

De acuerdo a los resultados de la sección 5.2, necesitamos el desarrollo de Laurent de  $\Delta_1 \zeta_\nu^{TE}(s, x)$  alrededor de  $s = -1$ , dado en (5.25) para  $x$  arbitrario y en (5.26) para  $x = 0^+$ . Como ya hemos señalado, la contribución de las partes singulares al lado derecho de la ecuación (5.14) se cancelan, porque sus residuos son independientes de  $x$  (ver (5.23)). Para la diferencia de las partes finitas para  $\nu \leq \nu_0$  tenemos

$$[\Delta_1 \zeta_\nu^{TE}(s, 0^+) - \Delta_1 \zeta_\nu^{TE}(s, x)]|_{s=-1} = \nu^2 z \times \quad (5.41)$$

$$\{\Theta(n_1 x - \nu)G(n_1 z) - \Theta(n_2 x - \nu)G(n_2 z) + \Theta(\nu_0^{TE} - \nu)G(n_2 R z/a)\},$$

donde

$$G(w) = \frac{\sqrt{w^2 - 1}}{2\pi} - \frac{\log(w + \sqrt{w^2 - 1})}{2\pi w}. \quad (5.42)$$

Reemplazando  $z = x/\nu$  y  $x = a\Omega/c$ , obtenemos para la contribución del orden dominante a la suma de la ecuación (5.15),

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hbar \Omega} \Delta_1 E^{TE}(a) &= \sum_{\nu \leq n_1 a \Omega / c} \nu^2 G\left(\frac{n_1 a \Omega}{\nu c}\right) - \\ &- \sum_{\nu \leq n_2 a \Omega / c} \nu^2 G\left(\frac{n_2 a \Omega}{\nu c}\right) + \sum_{\nu \leq \nu_0^{TE}} \nu^2 G\left(\frac{n_2 R \Omega}{\nu c}\right), \end{aligned} \quad (5.43)$$

donde  $\nu = l + 1/2$ , con  $l = 1, 2, \dots$ . Como  $\mu^2 G\left(\frac{1}{\mu}\right)$  tiene un máximo pronunciado en  $\mu \approx 1/2$ , la aproximación a  $E^{TE}(a)$  dada por  $\Delta_1 E^{TE}(a)$  estará justificada siempre que  $a\Omega/c \gg 1$ .

Notar que el último término en el lado derecho de (5.43), el único que es función de  $R$ , no depende de  $a$  (radio de la burbuja) ni de  $n_1$  (índice de refracción del medio interno). En efecto, como mostramos en la sección anterior,  $\nu_0^{TE}$  es independiente de esos parámetros (ver (5.37)). Luego, este será el único término que permanecerá en el límite  $a \rightarrow 0$ , ya que los otros dos términos se anulan.

Para llevar a cabo las sumas involucradas en los dos primeros términos del lado derecho de (5.43) haremos uso de la fórmula de Euler-Maclaurin [69]. Pero primero debemos notar que, aunque las funciones  $f_k(\nu) := \nu^2 G(n_k a \Omega / \nu c)$ ,  $k = 1$  o

2, así como también su primer derivada son finitas y acotadas para  $\nu \in [\frac{3}{2}, \nu_k]$  (aquí  $\nu_k = [n_k a \Omega / c - 1/2] + 1/2$ , donde los corchetes significan la parte entera), la segunda derivada es no-acotada cerca de  $\nu_k$ . Esto es así porque

$$f_k(\nu) = g_k(\nu) + \mathcal{O}(\nu_k - \nu)^{\frac{5}{2}}, \quad (5.44)$$

donde

$$g_k(\nu) := \frac{2\sqrt{2\nu_k}}{3\pi}(\nu_k - \nu)^{\frac{3}{2}}. \quad (5.45)$$

Luego, podemos restar y sumar  $g_k(\nu)$  a  $f_k(\nu)$ , y aplicar la fórmula de suma de Euler - Maclaurin a la diferencia [103],

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=3/2}^{\nu_k} [f_k(\nu) - g_k(\nu)] &= \int_{3/2}^{\nu_k} [f_k(x) - g_k(x)] dx + \\ &+ \frac{1}{2} ([f_k(3/2) - g_k(3/2)] + [f_k(\nu_k) - g_k(\nu_k)]) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\nu=5/2}^{\nu_k} \int_{\nu-1}^{\nu} (x - [x]) (1 - x + [x]) [f_k^{(2)}(x) - g_k^{(2)}(x)] dx. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Como la derivada segunda que aparece en el argumento de la última integral es no-positiva, es fácil ver que el resto (este último término) es  $\mathcal{O}(n_k a \Omega / c)$ . Luego, un cálculo directo lleva a

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=3/2}^{\nu_k} [f_k(\nu) - g_k(\nu)] &= \frac{(5 - 16\sqrt{2})}{60\pi} \left( \frac{n_k a \Omega}{c} \right)^3 + \frac{2^{3/2}}{3\pi} \left( \frac{n_k a \Omega}{c} \right)^2 + \\ &+ \mathcal{O} \left( \frac{n_k a \Omega}{c} \right). \end{aligned} \quad (5.47)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=3/2}^{\nu_k} g_k(\nu) &= \frac{2^{3/2}}{3\pi} \sqrt{\frac{n_k a \Omega}{c}} \left\{ \zeta_H \left( \frac{-3}{2}, \alpha_k \right) - \zeta_H \left( \frac{-3}{2}, \left( \frac{n_k a \Omega}{c} - \frac{1}{2} \right) \right) \right\} = \\ &= \frac{2^{3/2}}{3\pi} \left\{ \frac{2}{5} \left( \frac{n_k a \Omega}{c} \right)^3 - \left( \frac{n_k a \Omega}{c} \right)^2 + \mathcal{O} \left( \frac{n_k a \Omega}{c} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (5.48)$$

donde  $\alpha_k = (n_k a \Omega / c - 1/2) - [n_k a \Omega / c - 1/2] \in [0, 1)$ , y en la última igualdad fue usado el desarrollo asintótico de la función  $\zeta$  de Hurwitz,  $\zeta_H(s, v)$ , para grandes valores de  $v$  [103].



Finalmente, sumando los resultados de las ecuaciones (5.47) y (5.48) (notar que las contribuciones de superficie se cancelan), tomando la diferencia para  $k = 1, 2$  (que corresponde la diferencia de los dos primeros términos del lado derecho de (5.43)), y sumando una expresión similar que viene del tercer término de esa ecuación, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hbar \Omega} \Delta_1 E^{TE}(a) &= \frac{(n_1^3 - n_2^3)}{12\pi} \left( \frac{a\Omega}{c} \right)^3 + \mathcal{O} \left( \frac{a\Omega}{c} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{12\pi} \left( \frac{n_2 R \Omega}{c} \right)^3 \times \\ &\quad \left\{ 1 - 3k_1^{TE} \left( \frac{n_2 R \Omega}{c} \right)^{-2/3} + 3 \left( k_1^{TE^2} + k_2^{TE} \right) \left( \frac{n_2 R \Omega}{c} \right)^{-4/3} \right\} + \\ &\quad + \mathcal{O} \left( \frac{R \Omega}{c} \right). \end{aligned} \tag{5.49}$$

Para los modos TM, se encuentra el mismo resultado que para  $\Delta_1 E^{TE}(a)$ , con  $k_{1,2}^{TE} \rightarrow k_{1,2}^{TM}$ .

La ecuación (5.49) muestra que las contribuciones dominantes a la energía de vacío, en este desarrollo asintótico, son términos de volumen, de acuerdo con [26, 31, 32, 33].

Hay un término proporcional al volumen del espacio accesible ( $\sim R^3$ ), con correcciones que dependen de potencias fraccionarias de  $R$  inducidas por el corte impuesto (ver (5.37) y (5.39)). Estas correcciones son independientes de  $n_1$  y de  $a$ . Hay también una contribución proporcional al volumen de la burbuja ( $\sim a^3$ ), que es el doble del valor obtenido para el caso del campo escalar discutido en el capítulo 4, multiplicado por  $(n_1^3 - n_2^3)$ . Luego, es el signo de la diferencia  $(n_1^3 - n_2^3)$  lo que determina el comportamiento de la energía de vacío con respecto al radio de la burbuja. En particular, este término se anula cuando  $n_1 = n_2$ . Esto será discutido con más detalle en la sección 5.5.

### 5.4.2. Correcciones de tamaño finito

Para incorporar las primeras correcciones de tamaño finito a la energía de vacío, necesitamos el desarrollo de Laurent del orden subdominante en los desarrollos asintóticos de las funciones  $\zeta$  alrededor de  $s = -1$ , ecuaciones (5.27) y (5.28). Para

los modos TE tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\hbar\Omega} \Delta_0 E^{TE}(a) &= \left( \frac{a\Omega}{c} \right)^{-1} \sum_{\nu=3/2}^{\nu_0^{TE}} \nu \left[ \Delta_0 \zeta_\nu^{TE}(s, 0^+) - \Delta_0 \zeta_\nu^{TE}(s, x) \right] \Bigg|_{s \rightarrow -1} = \\
&\left( \frac{a\Omega}{c} \right)^{-1} \left\{ \frac{-1}{4n_<} \sum_{\nu \leq \nu_<} \nu^2 - \frac{1}{4n_>} \sum_{\nu \leq \nu_>} \nu^2 - \frac{a}{4n_2 R} \sum_{\nu \leq \nu_0^{TE}} \nu^2 + \right. \\
&+ \frac{2}{\pi(n_> + n_<)} \left[ K \left( \frac{n_> - n_<}{n_> + n_<} \right) \sum_{\nu \leq \nu_<} \nu^2 + \sum_{\nu_< < \nu \leq \nu_>} \nu^2 \times \right. \\
&\left. \left. F \left( \arcsin \sqrt{\frac{(n_> + n_<)(\nu_> - u)}{(n_> - n_<)(\nu_> + u)}}, \frac{n_> - n_<}{n_> + n_<} \right) \right] \right\}, \tag{5.50}
\end{aligned}$$

donde  $\nu = l + 1/2$ , con  $l = 1, 2, \dots$ ,  $\nu_< = n_< x$ ,  $\nu_> = n_> x$  y  $K(k) = F(\pi, k)$  es la integral elíptica completa [69].

De manera similar, para los modos TM tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\hbar\Omega} \Delta_0 E^{TM}(a) &= \left( \frac{a\Omega}{c} \right)^{-1} \sum_{\nu=3/2}^{\nu_0^{TM}} \nu \left[ \Delta_0 \zeta_\nu^{TM}(s, 0^+) - \Delta_0 \zeta_\nu^{TM}(s, x) \right] \Bigg|_{s \rightarrow -1} = \\
&\left( \frac{a\Omega}{c} \right)^{-1} \left\{ \frac{-1}{4n_<} \sum_{\nu \leq \nu_<} \nu^2 - \frac{1}{4n_>} \sum_{\nu \leq \nu_>} \nu^2 + \frac{a}{4n_2 R} \sum_{\nu \leq \nu_0^{TM}} \nu^2 + \right. \\
&+ \frac{n_<^2}{\pi n_>^2} \left[ \Pi \left( \frac{\pi}{2}, 1 - \frac{n_<^4}{n_>^4}, \sqrt{1 - \frac{n_<^2}{n_>^2}} \right) \sum_{\nu \leq \nu_<} \nu^2 + \sum_{\nu_< < \nu \leq \nu_>} \nu^2 \times \right. \\
&\left. \left. \Pi \left( \arcsin \sqrt{\frac{\nu_>^2 - \nu^2}{\nu_>^2 - \nu_<^2}}, 1 - \frac{n_<^4}{n_>^4}, \sqrt{1 - \frac{n_<^2}{n_>^2}} \right) \right] \right\}. \tag{5.51}
\end{aligned}$$

Por simplicidad, supondremos que los índices de refracción son tales que  $(\nu_< - 1/2)$  y  $(\nu_> - 1/2)$  son ambos enteros. Esto no conlleva ninguna pérdida de generalidad en el resultado que estamos buscando porque, como en el caso de las contribuciones de volumen que consideramos antes, las partes fraccionarias  $\alpha_k = n_k x - [n_k x]$  no tienen efecto en los términos dominantes de las sumas para  $a\Omega/c \gg 1$ .

Casi todas las sumas que aparecen en el lado derecho de las ecuaciones (5.50) y

(5.51) se pueden resolver trivialmente, pues

$$\sum_{\nu=3/2}^{\nu_f} \nu^2 = \frac{\nu_f^3}{3} + \mathcal{O}(\nu_f^2). \quad (5.52)$$

Las excepciones son los últimos términos que aparecen en esas ecuaciones. Pero estas contribuciones pueden aproximarse por la fórmula de suma de Euler-Maclaurin.

De nuevo aquí debemos notar que las funciones en los argumentos de estas sumas, digamos  $f(\nu)$ , se anulan (en ambos casos) como una raíz cuadrada en  $\nu_<$  y en  $\nu_>$ . Para nuestros propósitos, es suficiente sustraer una función  $g(\nu)$  que se comporte de la misma manera, para obtener una diferencia con una derivada primera positiva y acotada, a la cual podamos aplicar la fórmula de suma de Euler-Maclaurin [103],

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=\nu_<+1}^{\nu_>} [f(\nu) - g(\nu)] &= \int_{\nu_<+1}^{\nu_>} [f(\nu) - g(\nu)] d\nu + \\ &+ [f(\nu_< + 1) - g(\nu_< + 1)] + \int_{\nu_<+1}^{\nu_>} (x - [x]) [f'(x) - g'(x)] dx. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Se puede verificar fácilmente que el resto (el último término en el lado derecho) es  $\mathcal{O}(a\Omega/c)$ . Por otro lado, la suma  $\sum_{\nu=\nu_<+1}^{\nu_>} g(\nu)$  se puede resolver exactamente en términos de funciones  $\zeta$  de Hurwitz.

Reuniendo todos estos resultados tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hbar\Omega} \Delta_0 E^{TE}(a) &= \mathcal{O}\left(\frac{a\Omega}{c}\right) - \frac{1}{12} \left(\frac{n_2 R \Omega}{c}\right)^2 \times \\ &\left\{ 1 - 3k_1^{TE} \left(\frac{n_2 R \Omega}{c}\right)^{-2/3} \right\} + \mathcal{O}\left(\frac{R \Omega}{c}\right) \end{aligned} \quad (5.54)$$

para los modos TE y

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hbar\Omega} \Delta_0 E^{TM}(a) &= -\frac{1}{12} \frac{(n_>^2 - n_<^2)^2}{n_>^2 + n_<^2} \left(\frac{a\Omega}{c}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{a\Omega}{c}\right) + \\ &+ \frac{1}{12} \left(\frac{n_2 R \Omega}{c}\right)^2 \left\{ 1 - 3k_1^{TM} \left(\frac{n_2 R \Omega}{c}\right)^{-2/3} \right\} + \mathcal{O}\left(\frac{R \Omega}{c}\right) \end{aligned} \quad (5.55)$$

para los modos TM.

Notar que para los modos TE no hay contribuciones de superficie originadas por la separación entre dieléctricos. Esto está de acuerdo con los resultados hallados en [30] para medios no magnéticos. Por otro lado, hay una contribución superficial negativa en el resultado para los modos TM, que se anula para  $n_1 = n_2$ . Además,

tanto en los casos TE como TM hay contribuciones de superficie correspondientes al contorno exterior ( $\sim R^2$ ), las cuales difieren sólo en su signo y se cancelan mutuamente cuando son sumadas. Esto está en acuerdo con el hecho de que las condiciones de contorno de Dirichlet y Neumann contribuyen con términos de superficie opuestos [30] (ver sección 5.2). Finalmente, también aparecen correcciones que dependen de potencias fraccionarias de  $R$ , las que son inducidas por el corte impuesto en las frecuencias (ver (5.37) y (5.39)).

Cabe destacar que el procedimiento que hemos seguido para evaluar la energía de Casimir se puede continuar hasta cualquier orden dado en el desarrollo asintótico de las ecuaciones (5.17) y (5.20), obteniendo un resultado al orden correspondiente en potencias de  $(a\Omega/c)^{-1}$  (desarrollo que estará justificado en la medida en que  $(a\Omega/c) \gg 1$ ).

## 5.5. La energía de Casimir

### 5.5.1. La presión electromagnética sobre la burbuja

Como mencionamos en la sección anterior, las contribuciones que dependen de  $R$  en el lado derecho de la ecuación (5.49) (y la correspondiente para los modos TM), así como también en (5.54) y (5.55) son independientes de  $a$  y de  $n_1$ . Luego, esas contribuciones se cancelan si uno refiere la energía al caso donde el medio de índice  $n_2$  llena completamente el interior de la esfera externa. Esto puede ser hecho sustrayendo de la energía de vacío antes calculada, la misma expresión con  $a = 0$ . De esta manera, cualquier referencia al radio exterior  $R$  desaparece y se obtiene

$$\frac{1}{\hbar\Omega} \mathcal{E}(a) = \frac{(n_1^3 - n_2^3)}{6\pi} \left(\frac{a\Omega}{c}\right)^3 - \frac{1}{12} \frac{(n_1^2 - n_2^2)^2}{n_1^2 + n_2^2} \left(\frac{a\Omega}{c}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{a\Omega}{c}\right). \quad (5.56)$$

El segundo término en el lado derecho de (5.56) (una contribución de superficie, cualitativamente similar a la obtenida en [109]) es negativa, mientras que el comportamiento del primer término, de volumen, depende del signo de  $(n_1^3 - n_2^3)$ . Para una frecuencia de corte  $\Omega$  grande, la contribución de volumen es dominante, en acuerdo con lo sostenido en [26, 31, 32, 33].

Como esperábamos,  $\mathcal{E}(a) = 0$ , para  $n_1 = n_2$ . Y si, por ejemplo,  $n_2 > n_1$ ,  $\mathcal{E}(a)$  resulta ser una función negativa, monótonamente decreciente con  $a$ .

Pero se debe tener en cuenta que, como fuera señalado en [100], los valores de  $\mathcal{E}(a)$  para radios diferentes de la burbuja se refieren a configuraciones con *diferentes cantidades de material* en cada medio, y entonces no son directamente comparables.

En consecuencia, en los cálculos que siguen retendremos la dependencia completa de la energía de vacío con  $R$ , tal como fuera hallada en las ecuaciones (5.49), (5.54) y (5.55), y consideraremos que los índices de refracción varían con el volumen

de la burbuja, de manera de mantener constante el número de moléculas de cada dieléctrico. Esta condición es equivalente a demandar que [100]

$$[n_1(a)^2 - 1] a^3 = \text{constante}, \quad [n_2(a)^2 - 1] (R^3 - a^3) = \text{constante}, \quad (5.57)$$

lo cual implica que

$$n'_1(a) = -\frac{3}{2a} \frac{(n_1(a)^2 - 1)}{n_1(a)}, \quad n'_2(a) = \frac{3a^2}{2(R^3 - a^3)} \frac{(n_2(a)^2 - 1)}{n_2(a)}. \quad (5.58)$$

Esas derivadas, reemplazadas en la expresión para la *presión* que ejerce el campo electromagnético sobre el contorno de separación entre los dieléctricos,

$$\begin{aligned} P(a) &:= \frac{-1}{4\pi a^2} \left[ \frac{\partial}{\partial a} + n'_1(a) \frac{\partial}{\partial n_1} + n'_2(a) \frac{\partial}{\partial n_2} \right] E_{Cas}(a) = \\ &= \frac{-1}{4\pi a^2} \frac{d}{da} (\Delta_1 E^{TE}(a) + \Delta_1 E^{TM}(a) + \Delta_0 E^{TE}(a) + \Delta_0 E^{TM}(a) + \dots), \end{aligned} \quad (5.59)$$

conducen de manera directa a

$$\begin{aligned} \frac{P(a)}{\hbar\Omega} \left( \frac{\Omega}{c} \right)^{-3} &= \frac{-1}{16\pi^2} \{ [n_2(a)^3 - n_1(a)^3] - 3[n_2(a) - n_1(a)] \} + \\ &+ \frac{1}{24\pi} \left( \frac{a\Omega}{c} \right)^{-1} \left\{ \frac{3(n_1(a)^2 - 1)(n_2(a)^2 - n_1(a)^2)(n_1(a)^2 + 3n_2(a)^2)^2}{(n_1(a)^2 + n_2(a)^2)^2} + \right. \\ &\left. + \frac{(n_1(a)^2 - n_2(a)^2)^2}{n_1(a)^2 + n_2(a)^2} \right\} + \mathcal{O} \left( \frac{a\Omega}{c} \right)^{-2} + \mathcal{O} \left( \frac{R\Omega}{c} \right)^{-2/3}, \end{aligned} \quad (5.60)$$

donde ahora puede tomarse el límite  $R \rightarrow \infty$ .

Notar que  $n_2(a)$  es esencialmente constante, ya que tiene una derivada que se anula muy rápidamente con  $R$  ( $\sim R^{-3}$ ). Sin embargo, como entra en un término con un coeficiente de gran magnitud ( $\sim R^3$ ), proporciona una contribución finita a  $P(a)$ . Por otro lado, aquellos términos que contienen potencias menores de  $R$  no dan contribución en el límite  $R \rightarrow \infty$ . Esto sugiere que la expresión obtenida para  $P(a)$  es independiente de las condiciones de contorno impuestas sobre el campo en  $r = R$ . El primer término del lado derecho de la ecuación (5.60), que viene de la contribución de volumen a la energía de vacío (ecuación (5.49)), es claramente dominante para  $a\Omega/c \gg 1$ , mientras que el segundo término, que viene de la contribución de superficie (ecuación (5.55)) es menos significativo en esta región.

La presión  $P(a)$  se comporta de la siguiente manera, dependiendo de los valores de los índices de refracción: Como se esperaba, se anula para  $n_1 = n_2$ , y su derivada con respecto al índice exterior es negativa si  $n_2 > 1$ ,

$$\frac{\partial P(a)}{\partial n_2} = -\frac{3}{16\pi^2} (n_2^2 - 1) + \mathcal{O} \left( \frac{a\Omega}{c} \right)^{-1} < 0. \quad (5.61)$$

Luego, para  $n_2 > n_1$ ,  $P(a) < 0$  y la burbuja tiende a contraerse. Por otro lado, para  $n_2 < n_1$ ,  $P(a) > 0$  y la burbuja tiende a expandirse. De esta manera, arrivamos a la imagen usual de un dieléctrico que tiende a llenar el espacio vacío, aún para campo eléctrico nulo.

### 5.5.2. La energía de Casimir

La energía de Casimir como función del radio de la burbuja, para cantidades dadas de los materiales dieléctricos, puede obtenerse integrando  $-P(a)$  con respecto al volumen de la burbuja. Como señalamos en la sección anterior,  $n_2(a)$  es esencialmente constante, porque este dieléctrico tiene un gran volumen disponible (ver ecuación (5.58)). Por otro lado, cuando la burbuja está inicialmente llena con un dieléctrico de índice  $n_1$  y se expande desde un volumen inicial  $V_0 = 4\pi a_0^3/3$  hasta un volumen final  $V = 4\pi a^3/3$ , el índice de refracción final puede calcularse como

$$n_1(a) = \sqrt{1 + (n_1^2 - 1) \frac{V_0}{V}}. \quad (5.62)$$

Reteniendo sólo el término dominante en la expresión de la presión, ecuación (5.60), tenemos

$$\begin{aligned} E_{Cas}(a) - E_{Cas}(a_0) &= - \int_{V_0}^V P(a) dV = \\ &= \hbar \Omega \left( \frac{\Omega}{c} \right)^3 \left\{ \frac{1}{16 \pi^2} (n_2^3 - 3 n_2) (V - V_0) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8 \pi^2} \left[ V \left( 1 + (n_1^2 - 1) \frac{V_0}{V} \right)^{\frac{3}{2}} - n_1^3 V_0 \right] \right\} \left( 1 + \mathcal{O} \left( \frac{a \Omega}{c} \right)^{-1} \right). \end{aligned} \quad (5.63)$$

Notar que, al menos hasta este primer orden, la dependencia de los índices  $n_1$  y  $n_2$  aparece en términos separados.

Este resultado es más fácil de analizar en el caso particular de que la burbuja contenga un medio diluido, o sea, cuando  $n_1^2 - 1 = \epsilon_1 - 1 \ll 1$ . En este caso tenemos

$$\begin{aligned} E_{Cas}(a) - E_{Cas}(a_0) &= \hbar \Omega \left( \frac{\Omega}{c} \right)^3 \times \\ &\quad \left\{ \frac{(n_2 - 1)^2 (2 + n_2)}{16 \pi^2} (V - V_0) - \frac{3 (n_1^2 - 1)^2}{64 \pi^2} \frac{V_0}{V} (V - V_0) + \mathcal{O} (n_1^2 - 1)^3 \right\}. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Si el primer término es dominante (con  $n_2 > 1$ ), la energía de Casimir crece con el volumen. Pero si, por ejemplo, la esfera exterior contiene sólo vacío ( $n_2 = 1$ ), el primer término del lado derecho de la ecuación (5.64) se anula. En ese caso queda el

segundo término (con un coeficiente negativo, cuadrático en  $(\epsilon_1 - 1)$  como término dominante y, consecuentemente, la energía de Casimir decrece con el volumen como  $(V_0/V - 1)$ ).

## 5.6. Aplicación a la sonoluminiscencia

Uno de los motivos del gran interés dedicado al estudio de la energía de Casimir de medios dieléctricos con simetría esférica es debida a la sugerencia hecha por J. Schwinger [26] de que el Efecto Casimir podría desempeñar un papel clave en la explicación del peculiar fenómeno conocido como sonoluminiscencia, así llamado porque consiste básicamente en la *transformación de sonido en luz* [25].

Este fenómeno está caracterizado por el hecho de que la energía penetra en un fluido como una onda sonora (de frecuencia  $\sim 26$  kHz), la que induce sobre una burbuja de gaseosa (aire con un gas noble en pequeña proporción) atrapada en un nodo de velocidad, la emisión de intensos flashes de luz en sincronía con la onda sonora.

Los flashes de luz son emitidos al final de cada uno de los rápidos colapsos que sufre la burbuja gaseosa en cada ciclo acústico. Estos colapsos duran alrededor de  $4\mu s$ , reduciendo el radio de la burbuja desde  $\sim 45\mu s$  por un factor de  $10^{-1}$ , lo que hace que su superficie alcance velocidades supersónicas.

La violenta desaceleración que sufre la superficie de la burbuja cuando ésta alcanza el radio mínimo es acompañada también por la emisión de un pulso acústico saliente. Después de eso, la burbuja permanece a la espera del siguiente ciclo. La posterior expansión ocurre sobre escalas de tiempo hidrodinámicas, durante el semiciclo de rarefacción de la onda de presión (con cierta inercia, que hace que la burbuja alcance su máximo tamaño cuando el campo de sonido externo ya se ha vuelto compresivo).

Cada uno de los flashes de luz contiene alrededor de un millón de fotones visibles, emitidos con una distribución aproximadamente esférica. Su duración (menor que 50 ps) es unas cien veces más corta que el menor tiempo de vida media de un estado excitado del átomo de hidrógeno. La energía de los fotones llega hasta los 6,5 eV (fotones de frecuencia mayor no pueden propagarse en agua), y la potencia del flash puede alcanzar los 100 mW.

Si este pulso de luz fuera emitido desde una región de dimensiones atómicas, una comparación de la energía del flash con la energía media acústica entregada a un átomo del fluido por la onda sonora conduce a la conclusión de que debería haber ocurrido una *concentración de energía de doce órdenes de magnitud*.

Este fenómeno se puede percibir a simple vista en una habitación a oscuras, presentándose como la luz emitida por una estrella.

Aunque la descripción hidrodinámica del colapso y posterior expansión de la burbuja está hoy en día bien comprendida [25], el mecanismo mediante el cual una parte (aproximadamente 0,01 por ciento) de la energía suplida por el sonido es

emitida como un flash de luz es aún desconocido y aparentemente muy complejo [25].

No obstante, Schwinger [26] sugirió que el Efecto Casimir podría dar una explicación física para el fenómeno de la sonoluminiscencia, en el sentido de que la diferencia de la energía electromagnética de vacío (estática) debida al cambio en el radio de la burbuja podría proveer la energía a ser emitida como fotones al final del colapso de la burbuja.

Pero, a pesar de la atractiva sencillez de esa propuesta, aún no ha habido un acuerdo acerca de cómo evaluar este cambio en la energía de Casimir, y diferentes aproximaciones al problema realizadas por distintos grupos de trabajo han llevado a conclusiones controversiales [29, 30, 31, 97, 27, 98, 99, 32, 33].

En particular, la presencia de divergencias ultravioletas dificulta la interpretación física de las partes finitas. Sin embargo, como mencionamos en la introducción, estos inconvenientes tienen su origen en el hecho de que los modelos usados habitualmente en la descripción de los medios dieléctricos no incorporan, en su mayoría, una relación de dispersión realista, dependiente de la frecuencia, conduciendo así a un comportamiento ultravioleta inadecuado.

En el capítulo 3, hemos considerado una esfera dieléctrica no magnética con una permitividad dependiente de la frecuencia (una aproximación de altas energías al modelo de Drude). Allí hemos mostrado que resulta una estructura de polos muy simple para la función  $\zeta$  correspondiente, y que sólo se necesita un contratérmino de volumen para mantener finita a la energía de Casimir, no siendo necesarios contratérminos de superficie ni de curvatura.

Con el comportamiento ultravioleta de ese modo bajo control, tiene sentido analizar las partes finitas de la energía de Casimir para medios realistas. En ese contexto, el análisis del modelo que estamos considerando, y la aplicación de los resultados obtenidos en la sección anterior para un cálculo cuasi-estático de la variación de la energía del vacío, es un paso en la dirección de incorporar las contribuciones de frecuencia finita a la energía de Casimir.

Para una burbuja de gas esférica y rodeada por agua, podemos tomar  $n_1 = 1$  y  $n_2 = 4/3$ . En este caso, la presión (ecuación (5.60)) se reduce a

$$\frac{P(a)}{\hbar\Omega} \left(\frac{\Omega}{c}\right)^{-3} = \frac{-5}{216\pi^2} + \frac{49}{5400\pi} \left(\frac{a\Omega}{c}\right)^{-1} + \mathcal{O}\left(\frac{a\Omega}{c}\right)^{-2} \simeq -2 \times 10^{-3}, \quad (5.65)$$

aproximadamente una constante negativa si  $(a\Omega/c) \gg 1$ , mientras que la diferencia de energías de Casimir (ecuación (5.63)) es

$$\frac{E_{Cas}(a_0) - E_{Cas}(a)}{\hbar\Omega} \left(\frac{\Omega}{c}\right)^{-3} \simeq \frac{5}{216\pi^2} (V_0 - V) \simeq 2 \times 10^{-3} (V_0 - V). \quad (5.66)$$

Vamos ahora a considerar un radio inicial  $a_0 = 45 \mu\text{m}$ , y un radio final  $a = a_0/10$ . Luego tenemos  $(V_0 - V) = V_0(1 - 10^{-3}) \simeq V_0$ .



En primer lugar, estimaremos la diferencia de energías de Casimir igualándola a la energía emitida: suponiendo que el flash tiene un millón de fotones con una energía media de 5 eV, tenemos  $(E_{Cas}(a_0) - E_{Cas}(a)) \simeq 5 \times 10^6$  eV. La ecuación (5.66) luego da  $(a\Omega/c) \simeq 608$ , valor que justifica los desarrollos asintóticos que hemos utilizado. Para estos valores, la frecuencia de corte queda  $\Omega \simeq 4 \times 10^{15}$  1/s, equivalente a una energía (visible) de alrededor de 2,6 eV. Notar que el índice de refracción del agua toma un valor esencialmente igual a 1 a frecuencias del orden de  $10^{16}$  1/s (ver [34], página 291). La frecuencia de corte que hemos encontrado corresponde a una presión electromagnética de  $P \simeq -2 \times 10^{-5}$  atm, de una magnitud mucho menor que la presión acústica sobre la burbuja ( $\sim 1$  atm) [25], de modo que no afecta la descripción hidrodinámica de su movimiento [25].

Por otro lado, si tomamos como frecuencia de corte el valor por encima del cual no hay propagación de fotones en agua,  $\Omega \simeq 10^{16}$  1/s (que corresponde a una energía de 6,5 eV, con  $(a_0\Omega/c) \simeq 1490$ ), tenemos para la diferencia de energías de Casimir el valor  $(E_{Cas}(a_0) - E_{Cas}(a)) \simeq 1,8 \times 10^8$  eV, que es unas 35 veces la energía de cada pulso. La correspondiente presión electromagnética es  $P \simeq -7,5 \times 10^{-4}$  atm.

Aunque los valores obtenidos más arriba fueron derivados de un modelo estático que, si bien presenta rasgos realistas, ignora la complicada dependencia del índice de refracción con la frecuencia, nuestros resultados son consistentes con la propuesta de Schwinger acerca de la importancia de la energía de Casimir en la sonoluminiscencia: el vacío electromagnético puede actuar como un reservorio de energía para la emisión del pulso de luz, la que es almacenada durante la fase de expansión de la burbuja.

## 5.7. Contribuciones de los modos de alta frecuencia

En las secciones anteriores hemos calculado la energía de Casimir de una burbuja esférica dieléctrica no magnética, de radio  $a$ , inmersa en un segundo medio dieléctrico, modelando los índices de refracción como constantes hasta cierta frecuencia de corte común  $\Omega$ , a partir de la cual esos índices toman el valor correspondiente al espacio vacío. Esta característica, que se refleja en una condición de contorno dependiente de la frecuencia sobre la superficie de separación de ambos medios, hizo que ese contorno pudiera ser considerado como totalmente transparente para aquellos modos del campo electromagnético de frecuencia mayor que  $\Omega$ .

Como se mencionó en la sección 5.2.1, bajo esas condiciones la contribución a la energía de vacío de los modos de alta frecuencia,  $\omega > \Omega$ , puede ser descartada simplemente redefiniendo el nivel de referencia de la energía mediante la sustracción de una cantidad divergente pero independiente del radio de la burbuja  $a$ .

En la sección siguiente consideraremos la contribución de altas frecuencias cuando se considera un comportamiento realista derivado del modelo de Drude. En esas condiciones, mostraremos que la contribución *relevante* a la parte finita de la energía de Casimir proviene efectivamente del rango de bajas frecuencias, ecuación (5.56).

Esto valida los resultados de los cálculos presentados en las secciones anteriores para la presión electromagnética sobre una burbuja, y su aplicación al fenómeno de la sonoluminiscencia.

Por último, con respecto a las divergencias ultravioletas que este modelo presenta en el marco de la regularización  $\zeta$ , veremos que su dependencia de los parámetros del sistema es tal que sólo se necesita un contratérmino de volumen en el procedimiento de renormalización que hace finita la energía de Casimir.

### 5.7.1. Contribución de altas frecuencias usando el Modelo de Drude

Reformulamos entonces el problema considerando una burbuja dieléctrica esférica de radio  $a$ , con permitividad  $\epsilon_1$  (constante) relativa al vacío, sumergida en un medio de permitividad  $\epsilon_2(\omega)$ . Para analizar la contribución de los modos de alta frecuencia consideraremos una dependencia en todo el rango de frecuencias dada por

$$\epsilon_2(\omega) = \begin{cases} \epsilon_2, & \omega \leq \Omega \\ \epsilon_1 \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right), & \omega > \Omega \end{cases} \quad (5.67)$$

con  $\epsilon_2$  constante (en particular, podremos tomar  $\epsilon_1 = \epsilon_0$ , el valor correspondiente al vacío). Aquí,  $\Omega$  es la frecuencia de plasma característica del medio exterior, coincidente con la frecuencia de corte del modelo de bajas frecuencias. Observar que el contorno en  $r = a$  ya no será transparente para las altas frecuencias, sino que tenderá a serlo de una manera suave para  $\omega \rightarrow \infty$ , similarmente a como sucede en un medio real.

Como antes, encerramos al sistema en una gran esfera conductora de radio  $R \gg a$ , lo que proporciona condiciones de contorno adicionales (de Dirichlet o de Neumann) en  $r = R$  que dan lugar a un espectro discreto.

Separando las contribuciones de baja y alta frecuencia, podemos escribir

$$E = \frac{\hbar}{2} \sum_n^\infty \omega_n = \frac{\hbar}{2} \sum_n^{n_0} \omega_n + \frac{\hbar}{2} \sum_{n_0+1}^\infty \omega_n =: E_{\omega \leq \Omega} + E_{\omega > \Omega}, \quad (5.68)$$

donde  $n > n_0$  corresponde a  $\omega_n > \Omega$ .

En (5.68), la contribución  $E_{\omega \leq \Omega}$  corresponde a lo que ya hemos calculado en las secciones anteriores. Aquí estaremos interesados en el cálculo de la contribución de altas frecuencias  $E_{\omega > \Omega} = \frac{\hbar}{2} \sum_{n_0+1}^\infty \omega_n$ , donde  $\epsilon_2(\omega) = \epsilon_1 \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)$ .

Como en la primera parte de este capítulo, el campo electromagnético admite una descripción en términos de los modos transversales eléctricos (TE) y transversales magnéticos (TM), ecuaciones (3.5) - (3.13), sujetos a las condiciones de contorno (5.3) y (5.4) respectivamente. Dentro de cada medio dieléctrico, el campo satisface la ecuación de Helmholtz (3.6), que se reduce a ecuaciones diferenciales como en

(5.5). La imposición de las condiciones de contorno nos conduce a ecuaciones cuyas raíces determinan las autofrecuencias involucradas en la suma que define a  $E_{\omega > \Omega}$ . Estas ecuaciones tienen la misma forma que las dadas en (5.6) y (5.8) para las funciones  $\Delta_\nu^{TE}(z)$  y  $\Delta_\nu^{TM}(z)$  respectivamente, con el único cambio de  $\epsilon_2$  por  $\epsilon_2(\omega)$ .

Luego, para  $\omega > \Omega$  debemos evaluar la suma

$$E_{\omega > \Omega}^{TE} = \sum_{n_0+1}^{\infty} \frac{\hbar}{2} \omega_n = \sum_{\nu=3/2}^{\infty} 2\nu \sum_{n=N_\nu+1}^{\infty} \frac{\hbar}{2} \omega_{\nu,n} = \frac{\hbar c}{R} \sum_{\nu=3/2}^{\infty} \nu \sum_{n=N_\nu+1}^{\infty} z_{\nu,n}, \quad (5.69)$$

y una expresión similar para los modos TM. En la expresión de arriba,  $N_\nu$  tiene la misma interpretación que antes: es el número de ceros positivos de  $\Delta_\nu^{TE}(z)$  que son menores o iguales a  $x = R\Omega/c$ . Luego los  $\omega_{\nu,n}$  ( $z_{\nu,n}$ ) que aparecen en (5.69) representan los modos de frecuencia *mayor* que  $\Omega$ .

Como antes, trabajamos en el marco de la regularización  $\zeta$ . Usando la definición

$$\sum_{n=N_\nu+1}^{\infty} z_{\nu,n} := \sum_{n=N_\nu+1}^{\infty} z_{\nu,n}^{-s} \Big|_{s=-1}, \quad (5.70)$$

podemos representar la suma  $\sum_{n=N_\nu+1}^{\infty} z_{\nu,n}^{-s}$  mediante una integral en el plano complejo  $z$  como en la ecuación (5.11), donde ahora la curva  $C$  encierra a todos los ceros *mayores* que  $x$ . Para  $\Re(s)$  suficientemente grande, esa curva puede ser deformada en una línea recta vertical que cruza el eje real en  $\Re(z) = x^+$  (ver ecuación (5.13)). Después de un cambio de variables, obtenemos la suma en el lado derecho de (5.70) como

$$\sum_{n=N_\nu+1}^{\infty} z_{\nu,n}^{-s} = \Re \left\{ \frac{-\nu^{-s}}{\pi} e^{-i\frac{\pi}{2}(s+1)} \int_{-iz^+}^{\infty-iz} t^{-s} \frac{d(\ln \Delta_\nu^{TE}(i\nu t))}{dt} dt \right\}, \quad (5.71)$$

para  $s > 1$ . Aquí hemos llamado  $z = x/\nu > 0$ , con  $x = R\Omega/c$ . Luego, tenemos que

$$E_{\omega > \Omega}^{TE} = \frac{\hbar c}{R} \times \sum_{\nu=3/2}^{\infty} \nu \Re \left\{ \frac{-\nu^{-s}}{\pi} e^{-i\frac{\pi}{2}(s+1)} \int_{-iz^+}^{\infty-iz} t^{-s} \frac{d(\ln \Delta_\nu^{TE}(i\nu t))}{dt} dt \right\} \Big|_{s=-1} \quad (5.72)$$

y una expresión enteramente similar para los modos TM, con  $\Delta_\nu^{TM}(i\nu t)$  en lugar de  $\Delta_\nu^{TE}(i\nu t)$ .

Construimos la continuación analítica del lado derecho de la ecuación (5.71) a  $s \simeq -1$  restando y sumando del integrando los primeros términos obtenidos del desarrollo asintótico uniforme (desarrollo de Debye) [69] de las funciones de Bessel que aparecen en las expresiones de  $\Delta_\nu^{TE}(z)$  y  $\Delta_\nu^{TM}(z)$ , válidas para grandes valores de  $\nu$ , con  $t$  fijo. Obtenemos:

$$\frac{d \ln \Delta_\nu^{TE}(i\nu t)}{dt} = D_\nu^{TE}(t) + \mathcal{O}(\nu^{-4}) \quad (5.73)$$

para los modos TE, donde

$$D_{\nu}^{TE}(t) = \sum_{k=-3}^1 \nu^k D_{TE}^{(k)}(t). \quad (5.74)$$

Las funciones  $D_{TE}^{(k)}(t)$  son en el presente caso:

$$D_{TE}^{(1)}(t) = \frac{\sqrt{1+n_1^2 t^2}}{t}, \quad (5.75)$$

$$D_{TE}^{(0)}(t) = \frac{1}{2t} - \frac{n_1^2 t}{2(1+n_1^2 t^2)}, \quad (5.76)$$

$$\begin{aligned} D_{TE}^{(-1)}(t) = & \frac{5n_1^2 t}{8(1+n_1^2 t^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{n_1^2 t}{8(1+n_1^2 t^2)^{\frac{3}{2}}} + \\ & + \frac{a^4 n_1^4 t x^2}{2R^3 \sqrt{R^2+a^2 n_1^2 t^2}} - \frac{\sqrt{1+n_1^2 t^2} x^2}{t^3} + \frac{n_1^2 \sqrt{1+n_1^2 t^2} x^2}{2t} - \\ & - \frac{n_1^4 t x^2}{2\sqrt{1+n_1^2 t^2}} + \frac{\sqrt{R^2+a^2 n_1^2 t^2} x^2}{R t^3} - \frac{a^2 n_1^2 \sqrt{R^2+a^2 n_1^2 t^2} x^2}{2R^3 t}, \end{aligned} \quad (5.77)$$

$$D_{TE}^{(-2)}(t) = \frac{-15n_1^2 t}{8(1+n_1^2 t^2)^4} + \frac{3n_1^2 t}{2(1+n_1^2 t^2)^3} + \frac{-(n_1^2 t)+4n_1^4 t x^2}{8(1+n_1^2 t^2)^2}, \quad (5.78)$$

$$\begin{aligned} D_{TE}^{(-3)}(t) = & \frac{1105n_1^2 t}{128(1+n_1^2 t^2)^{\frac{11}{2}}} - \frac{1547n_1^2 t}{128(1+n_1^2 t^2)^{\frac{9}{2}}} + \frac{531n_1^2 t}{128(1+n_1^2 t^2)^{\frac{7}{2}}} - \\ & - \frac{25n_1^2 t}{128(1+n_1^2 t^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{25n_1^4 t x^2}{16(1+n_1^2 t^2)^{\frac{7}{2}}} + \frac{3n_1^4 t x^2}{16(1+n_1^2 t^2)^{\frac{5}{2}}} + \\ & + \frac{5a^4 n_1^4 R^3 t x^2}{16(R^2+a^2 n_1^2 t^2)^{\frac{7}{2}}} - \frac{3a^4 n_1^4 R t x^2}{16(R^2+a^2 n_1^2 t^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{n_1^6 t x^4}{8(1+n_1^2 t^2)^{\frac{3}{2}}} + \\ & + \frac{\sqrt{1+n_1^2 t^2} x^4}{t^5} - \frac{n_1^2 \sqrt{1+n_1^2 t^2} x^4}{2t^3} + \frac{3n_1^4 \sqrt{1+n_1^2 t^2} x^4}{8t} - \\ & - \frac{a^6 n_1^6 t x^4}{8R^3(R^2+a^2 n_1^2 t^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3a^6 n_1^6 t x^4}{8R^5 \sqrt{R^2+a^2 n_1^2 t^2}} - \frac{\sqrt{R^2+a^2 n_1^2 t^2} x^4}{R t^5} + \\ & + \frac{a^2 n_1^2 \sqrt{R^2+a^2 n_1^2 t^2} x^4}{2R^3 t^3} - \frac{3a^4 n_1^4 \sqrt{R^2+a^2 n_1^2 t^2} x^4}{8R^5 t} - \frac{3n_1^6 t x^4}{8\sqrt{1+n_1^2 t^2}}. \end{aligned} \quad (5.79)$$

Para los modos TM,

$$D_{\nu}^{TM}(t) = \sum_{k=-3}^1 \nu^k D_{TM}^{(k)}(t), \quad (5.80)$$

donde las funciones  $D_{TM}^{(k)}(t)$  están dadas por

$$D_{TM}^{(1)}(t) = \frac{\sqrt{1+n_1^2 t^2}}{t} \quad (5.81)$$

$$D_{TM}^{(0)}(t) = -\frac{1}{2t} + \frac{n_1^2 t}{2(1+n_1^2 t^2)}, \quad (5.82)$$

$$\begin{aligned} D_{TM}^{(-1)}(t) = & \frac{-7 n_1^2 t}{8(1+n_1^2 t^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{n_1^2 t}{8(1+n_1^2 t^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{n_1^4 t x^2}{2\sqrt{1+n_1^2 t^2}} + \\ & + \frac{\sqrt{R^2+a^2 n_1^2 t^2} x^2}{R t^3} - \frac{\sqrt{1+n_1^2 t^2} x^2}{t^3} + \frac{n_1^2 \sqrt{1+n_1^2 t^2} x^2}{2t} + \\ & + \frac{a^4 n_1^4 t x^2}{2 R^3 \sqrt{R^2+a^2 n_1^2 t^2}} - \frac{a^2 n_1^2 \sqrt{R^2+a^2 n_1^2 t^2} x^2}{2 R^3 t}, \end{aligned} \quad (5.83)$$

$$D_{TM}^{(-2)}(t) = \frac{21 n_1^2 t}{8(1+n_1^2 t^2)^4} - \frac{3 n_1^2 t}{2(1+n_1^2 t^2)^3} + \frac{n_1^2 t - 4 n_1^4 t x^2}{8(1+n_1^2 t^2)^{\frac{7}{2}}}, \quad (5.84)$$

$$\begin{aligned} D_{TM}^{(-3)}(t) = & \frac{-1463 n_1^2 t}{128(1+n_1^2 t^2)^{\frac{11}{2}}} + \frac{1813 n_1^2 t}{128(1+n_1^2 t^2)^{\frac{9}{2}}} - \frac{549 n_1^2 t}{128(1+n_1^2 t^2)^{\frac{7}{2}}} + \\ & + \frac{23 n_1^2 t}{128(1+n_1^2 t^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{35 n_1^4 t x^2}{16(1+n_1^2 t^2)^{\frac{7}{2}}} + \frac{3 n_1^4 t x^2}{16(1+n_1^2 t^2)^{\frac{5}{2}}} + \\ & + \frac{5 a^4 n_1^4 R^3 t x^2}{16(R^2+a^2 n_1^2 t^2)^{\frac{7}{2}}} + \frac{9 a^4 n_1^4 R t x^2}{16(R^2+a^2 n_1^2 t^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{a^4 n_1^4 t x^2}{4 R(R^2+a^2 n_1^2 t^2)^{\frac{3}{2}}} - \\ & - \frac{a^4 n_1^4 t x^2}{4 R^3 \sqrt{R^2+a^2 n_1^2 t^2}} - \frac{\sqrt{R^2+a^2 n_1^2 t^2} x^2}{2 R t^3} + \frac{a^2 n_1^2 \sqrt{R^2+a^2 n_1^2 t^2} x^2}{4 R^3 t} + \\ & + \frac{n_1^6 t x^4}{8(1+n_1^2 t^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3 n_1^6 t x^4}{8 \sqrt{1+n_1^2 t^2}} + \frac{\sqrt{1+n_1^2 t^2} x^4}{t^5} - \frac{n_1^2 \sqrt{1+n_1^2 t^2} x^4}{2 t^3} + \\ & + \frac{3 a^6 n_1^6 t x^4}{8 R^5 \sqrt{R^2+a^2 n_1^2 t^2}} + \frac{3 n_1^4 \sqrt{1+n_1^2 t^2} x^4}{8 t} - \frac{a^6 n_1^6 t x^4}{8 R^3 (R^2+a^2 n_1^2 t^2)^{\frac{3}{2}}} - \\ & - \frac{\sqrt{R^2+a^2 n_1^2 t^2} x^4}{R t^5} + \frac{a^2 n_1^2 \sqrt{R^2+a^2 n_1^2 t^2} x^4}{2 R^3 t^3} - \frac{3 a^4 n_1^4 \sqrt{R^2+a^2 n_1^2 t^2} x^4}{8 R^5 t}, \end{aligned} \quad (5.85)$$

donde  $n_1 = \sqrt{\epsilon_1}$  y  $x = R\Omega/c$ .

Notar que en (5.73) hemos retenido términos hasta el orden  $(\nu^{-3})$  inclusive. Esto es necesario para poder aislar todas las singularidades que aparecen en la continuación analítica a  $s = -1$ .

Luego, como en (5.19), debemos considerar

$$\int_{-iz}^{\infty-iz} t^{-s} \frac{d(\ln \Delta_{\nu}^{TE}(\imath \nu t))}{d t} dt = \int_{-iz}^{\infty-iz} t^{-s} D_{\nu}^{TE}(t) dt + \int_{-iz}^{\infty-iz} t^{-s} \left\{ \frac{d(\ln \Delta_{\nu}^{TE}(\imath \nu t))}{d t} - D_{\nu}^{TE}(t) \right\} dt \quad (5.86)$$

donde la segunda integral en el lado derecho converge, por construcción, para  $s > -2$  y puede ser evaluada directamente (numéricamente, por ejemplo) en  $s = -1$ . Volveremos sobre ella más adelante.

Con la primer integral en (5.86) debemos calcular

$$E_{\omega > \Omega}^{TE(1)} := \frac{\hbar c}{R} \sum_{k=-3}^1 \sum_{\nu=3/2}^{\infty} \nu^{1-s+k} \Re \left\{ \frac{-e^{-\imath \frac{\pi}{2}(s+1)}}{\pi} \int_{-iz}^{\infty-iz} t^{-s} D_{TE}^{(k)}(t) dt \right\}, \quad (5.87)$$

donde recordamos que aquí  $z = x/\nu$ , con  $x = R\Omega/c$ .

Se obtiene una expresión enteramente similar para  $E_{\omega > \Omega}^{TM(1)}$ , correspondiente a los modos TM, con  $D_{TM}^{(k)}(t)$  en lugar de  $D_{TE}^{(k)}(t)$ .

La continuación analítica de  $E_{\omega > \Omega}^{TE(1)}$  en (5.87) a  $s \approx -1$  nos conduce a las singularidades (y también a partes finitas) de (5.71). Estas se presentan como polos simples, dado que el integrando  $D_{\nu}^{TE}(t)$  es una función algebraica de  $t$  que se comporta como  $\mathcal{O}(t^0)$  para grandes valores de  $|t|$ . Luego, la integral converge absoluta y uniformemente para  $s > 1$ , región donde define una función analítica que puede ser extendida como una función meromorfa en la región de interés del parámetro  $s$ .

El método de cálculo de las contribuciones provenientes de los sucesivos órdenes del desarrollo de Debye (identificados con el índice  $k$  en (5.87)) es completamente análogo al que hemos utilizado en las secciones 5.2.3 y 5.4, excepto por el hecho de que la suma en  $\nu$  involucrada en (5.87) ya no es una suma finita como teníamos en (5.9), sino una serie infinita. Esto ya había sido encontrado en los cálculos del capítulo 3, donde pudimos mostrar que, gracias a que el límite inferior de integración en (3.42) podía ser tomado tan cercano a  $-\imath 0^+$  como se quisiera, la suma infinita en  $\nu$  podía calcularse inmediatamente por medio de la función  $\zeta$  de Hurwitz (ver ecuación (3.43)).

Por el contrario, en (5.87)  $z = R\Omega/c \gg 1$ , lo que *acopla* la suma en  $\nu$  con la integral en  $t$ , que ya no pueden calcularse por separado como se hizo en la sección 3.3.

No obstante, un análisis cuidadoso muestra que para cada orden del desarrollo de Debye, al tomar la parte real de la integral que aparece entre llaves en (5.87), quedan expresiones que, o bien son independientes de  $\nu$  (para las que la serie en  $\nu$  se reduce sencillamente a una función  $\zeta$  de Hurwitz), o bien son tales que su parte

real limita la serie en  $\nu$  a una suma finita, del tipo de las calculadas en la sección 5.4 por medio de la fórmula de Euler-Maclaurin.

Dado lo engorroso del cálculo, sólo expondremos aquí los resultados. La contribución a la parte finita (P.F.) de la energía de vacío de estos primeros órdenes del desarrollo de Debye es

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\hbar\Omega} \text{P.F.} \left( E_{\omega>\Omega}^{TE(1)} + E_{\omega>\Omega}^{TM(1)} \right) = \\
& = \left[ \frac{11 n_1 R \Omega}{24 c \pi} - \frac{n_1^3 R^3 \Omega^3}{6 c^3 \pi} + \mathcal{O} \left( \frac{R \Omega}{c} \right)^{-1} \right] + [0] + \\
& \left[ \left( \frac{3 a^2 n_1^2}{2 c^2 \pi} - \frac{3 n_1^2 R^2}{2 c^2 \pi} \right) \Omega^2 + \left( \frac{a^3 n_1^3}{3 c^3 \pi} - \frac{n_1^3 R^3}{3 c^3 \pi} \right) \Omega^3 + \right. \\
& + \Omega \left( a \left( \frac{-7 n_1}{8 c \pi} - \frac{11 n_1 \log(\frac{R \Omega}{c})}{24 c \pi} \right) + R \left( \frac{23 n_1}{24 c \pi} + \frac{11 n_1 \log(\frac{R \Omega}{c})}{24 c \pi} \right) \right) \\
& \left. + \frac{-3}{8 \pi} + \mathcal{O} \left( \frac{R \Omega}{c} \right)^{-1} \right] + \left[ \frac{3}{128} + \mathcal{O} \left( \frac{R \Omega}{c} \right)^{-1} \right] + \\
& + \left[ \Omega \left( R \left( \frac{47 n_1}{192 c \pi} - \frac{5 n_1 \log(2)}{12 c \pi} + \frac{5 n_1 \log(\frac{R \Omega}{c})}{24 c \pi} \right) + \right. \right. \\
& \left. + a \left( \frac{209 n_1}{192 c \pi} - \frac{11 n_1 \log(2)}{12 c \pi} + \frac{11 n_1 \log(\frac{R \Omega}{c})}{24 c \pi} \right) \right) + \\
& + \Omega^3 \left( a^3 \left( \frac{-(n_1^3)}{6 c^3 \pi} + \frac{n_1^3 \log(2)}{6 c^3 \pi} - \frac{n_1^3 \log(\frac{R \Omega}{c})}{12 c^3 \pi} \right) + \right. \\
& \left. + R^3 \left( \frac{n_1^3}{6 c^3 \pi} - \frac{n_1^3 \log(2)}{6 c^3 \pi} + \frac{n_1^3 \log(\frac{R \Omega}{c})}{12 c^3 \pi} \right) \right) + \mathcal{O} \left( \frac{R \Omega}{c} \right)^{-1} \right], \tag{5.88}
\end{aligned}$$

donde cada corchete corresponde a la contribución de cada orden del desarrollo de Debye (el primero corresponde al orden  $\nu^1$ , el segundo a  $\nu^0$ , y así siguiendo). Nótese que esta expresión tiene un límite finito cuando  $a \rightarrow 0$ .

En el primer corchete podemos identificar un término de volumen de la forma  $-\hbar n_1^3 R^3 \Omega^4 / (6\pi c^3)$ , similar al que aparece en la contribución de las bajas frecuencias, ecuación (5.49).

También se encuentra que ocurren ciertas cancelaciones entre términos divergentes infrarrojos que mezclan dependencias de  $R$  y de  $a$ , como los que contienen  $(a\Omega/c) \log(a/R)$  o  $(a\Omega/c) \log(R\Omega/c)$  en los órdenes  $\nu^{-1}$  y  $\nu^{-3}$ .

Hay también indicios de que los términos con distintas potencias de  $a$  que van surgiendo de las contribuciones de los sucesivos órdenes del desarrollo de Debye (aparentemente, sólo de los órdenes impares,  $\nu^{-1}, \nu^{-3}, \dots$ ), se van cancelando entre sí. Dada la creciente complejidad algebraica de este desarrollo, una forma de verificar esta hipótesis consistiría en estimar numéricamente el término con la diferencia  $\left( \frac{d(\ln \Delta_\nu^{TE}(i\nu t))}{dt} - D_\nu^{TE}(t) \right)$  en el segundo miembro de (5.86), que no ha sido necesario para identificar las partes singulares y que hemos desestimado hasta ahora. Esto será analizado en más detalle en el Apéndice D.

En dicho Apéndice se muestra, en primer lugar, que los términos con potencias positivas de  $a$  son un *artefacto* del desarrollo de Debye que estamos empleando. En efecto, al sumar a la expresión en (5.88) una estimación numérica de la contribución que viene del segundo término del lado derecho de (5.86), se encuentra que esas contribuciones se cancelan, quedando sólo términos de orden  $(a\Omega/c)^{-1}$  (que no fueron retenidos en el cálculo de (5.88)). Esto sugiere que si se recalculara esa contribución a órdenes más elevados en el desarrollo de Debye, esas potencias de  $a$  también se cancelarían.

Esto es una verificación de que el resultado *relevante* para la parte finita de la energía de vacío proviene efectivamente de la contribución de las bajas frecuencias, donde es válida la aproximación de las permitividades por constantes hasta una frecuencia de corte  $\Omega$ . En particular, los resultados obtenidos en la aplicación a la sonoluminiscencia son cualitativamente válidos.

Desde luego que el resultado completo para la energía de Casimir incluye un término de volumen con una constante fenomenológica indeterminada, remanente del proceso de renormalización en el que debe compensarse una singularidad con esa dependencia funcional. Con más precisión, deberíamos decir que los resultados obtenidos de la aplicación de este modelo a una burbuja sonoluminiscente son compatibles con pequeños valores para esa constante fenomenológica.

Por otro lado, sumando todas las contribuciones a las partes singulares (P.S.) de los términos considerados en el desarrollo de Debye, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hbar\Omega} \text{P.S.} \left( E_{\omega>\Omega}^{TE(1)} + E_{\omega>\Omega}^{TM(1)} \right) = \\ - \frac{n_1^3 \Omega^3 (R^3 - a^3)}{12 c^3 \pi (1+s)} + \frac{8 c}{315 n_1 \pi \Omega R (1+s)} + \mathcal{O}(s+1) . \end{aligned} \quad (5.89)$$

Como vemos en (5.89), las singularidades ultravioletas se manifiestan a través de un término de volumen y un término que se anula con  $R^{-1}$ . En el límite  $R \rightarrow \infty$



encontramos

$$E_{\omega > \Omega}^{P.S.} = -h \Omega^4 \frac{n_1^3}{16 \pi^2 c^3 (1+s)} V_2 + \mathcal{O}(s+1). \quad (5.90)$$

Este resultado esta en completo acuerdo con lo obtenido en el capítulo 3, ya que el volumen que aparece en la ecuación de arriba,  $V_2 = \frac{4}{3} \pi (R^3 - a^3)$ , corresponde al del medio (exterior) con índice de refracción  $\epsilon_2(\omega) = \epsilon_1 \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)$ .

## 5.8. Resumen y conclusiones

En este capítulo hemos considerado un modelo simple de medio dieléctrico, donde la descripción de sus propiedades se hace por medio de una relación de dispersión con una permitividad dependiente de la frecuencia, que toma en consideración de manera realista su respuesta tanto a bajas como a altas frecuencias. El problema así modelado permite evaluar por separado, en ambos rangos de frecuencia, las contribuciones a la energía de Casimir.

En el rango de bajas frecuencias, la permitividad y permeabilidad pueden ser tomadas como constantes hasta una frecuencia de corte  $\Omega$ , por encima de la cual ambos medios se hacen indistinguibles. Esto se refleja en condiciones de contorno sobre la superficie de separación entre medios dieléctricos que son dependientes de la frecuencia del campo electromagnético, de modo que esa separación se vuelve transparente para frecuencias mayores que la de corte.

Por otro lado, en el rango de altas frecuencias del campo, la dependencia de la permitividad con la frecuencia fue modelada usando el modelo de Drude.

Por simplicidad, hemos limitado nuestra atención a medios no magnéticos, y hemos estudiado la energía de Casimir de un dieléctrico esférico de radio  $a$  e índice de refracción  $n_1(\omega) = \sqrt{\epsilon_1(\omega)}$  sumergido en un segundo medio de índice  $n_2(\omega) = \sqrt{\epsilon_2(\omega)}$ , todo el sistema encerrado en una gran esfera conductora concéntrica de radio  $R$ .

Como se mencionó en el primer párrafo, las contribuciones de los modos de baja y alta frecuencia ( $\omega \leq \Omega$  y  $\omega > \Omega$  respectivamente) pueden ser calculadas por separado. La contribución a la energía de Casimir de los modos con frecuencia  $\omega \leq \Omega$  se reduce a dos sumas finitas, una para los modos transversales eléctricos (TE) y otra para los modos transversales magnéticos (TM). Para cada valor del momento angular  $l = \nu - 1/2$ , hemos representado estas sumas como *diferencias* de las funciones  $\zeta$  incompletas del modelo,  $\zeta_\nu^{TE}(s, x)$  y  $\zeta_\nu^{TM}(s, x)$ , introducidas en el capítulo 4 para el caso simplificado de un campo escalar con una condición de contorno dependiente de la frecuencia. En el Apéndice C hemos derivado la expresión de la función  $\Delta_\nu^{TE}(z)$ , cuyas raíces determinan las autofrecuencias de los modos TE para esta configuración de medios. También hemos probado que aquellos ceros que caen en el semiplano abierto derecho del plano complejo  $z$  son todos reales y simples, lo que justifica la representación integral que hemos usado para esas funciones  $\zeta$ . Lo mismo puede demostrarse para  $\Delta_\nu^{TM}(z)$ .

Este hecho nos permitió representar a las funciones  $\zeta$  incompleta como integrales en el plano complejo, haciendo uso del Teorema de Cauchy. Finalmente, el desarrollo asintótico uniforme de las funciones de Bessel hizo posible un desarrollo sistemático de esas funciones  $\zeta$ , hecho que facilita las continuaciones analíticas necesarias.

En la sección 5.2 hemos retenido de esa aproximación los términos necesarios para aislar las partes singulares de las funciones  $\zeta$  incompletas en  $s = -1$ . Estos términos son también suficientes para evaluar tanto las contribuciones de volumen como las primeras correcciones de tamaño finito a la energía de Casimir.

Como el menor cero positivo de  $\Delta_\nu^{TE}(z)$  ( $\Delta_\nu^{TM}(z)$ ) es una función creciente de  $\nu$ , se puede determinar el máximo valor de  $\nu$ ,  $\nu_0^{TE}$  ( $\nu_0^{TM}$ ), para el cual hay autofrecuencias menores o iguales a  $\Omega$ . Esto fue calculado en la sección 5.3. A partir de la continuación analítica de las funciones  $\zeta$  incompletas a  $s = 0$ , hemos mostrado en esa sección que  $\nu_0^{TE}$  y  $\nu_0^{TM}$  son funciones lineales de  $(n_2 R \Omega / c)$  (con correcciones que dependen de potencias fraccionarias menores, inducidas por la presencia del corte), las cuales son independientes de  $n_1$  y de  $a$ .

En la sección 5.4 hemos mostrado que, para  $(a \Omega / c) \gg 1$ , las contribuciones dominantes son términos de volumen (ver ecuación (5.49)), cuyo signo está determinado por la diferencia  $(n_1^3 - n_2^3)$ , más un término positivo proporcional al volumen del espacio accesible al medio exterior, que resulta independiente de  $n_1$  y de  $a$ .

El segundo orden en el desarrollo de Debye produce las primeras correcciones de tamaño finito a la energía de Casimir, las cuales son contribuciones de superficie (ver ecuaciones (5.54) y (5.55)). Aparece un término negativo proporcional a la superficie de la burbuja, el cual proviene exclusivamente de los modos TM. Aparecen también contribuciones correspondientes al contorno externo, debidas a ambos modos TE y TM, las cuales sin embargo sólo difieren en el signo y se cancelan cuando son sumadas. Hay también correcciones proporcionales a potencias no enteras de  $(n_2 R \Omega / c)$  (potencia  $\frac{7}{3}$  y menores) que son inducidas por la relación entre  $\nu_0^{TE}$  ( $\nu_0^{TM}$ ) y  $R \Omega / c$ . Esas correcciones, sin embargo, no tienen consecuencias en el límite  $R \rightarrow \infty$ .

Los resultados mencionados arriba han sido analizados en la sección 5.5. En primer lugar, hemos considerado la diferencia entre las energías de Casimir para dos configuraciones, una con un dado valor del radio  $a$ , y la otra correspondiente a la situación donde el medio externo llena todo el espacio interior a la esfera externa. Se obtiene el resultado dado en la ecuación (5.56), de donde se observa que esa diferencia es independiente de  $R$ . Su comportamiento con respecto a  $a$  depende de los valores de  $n_1$  y  $n_2$  pero, como fue señalado antes, esta expresión debe ser considerada con cuidado pues sus valores para radios diferentes se refieren a cantidades diferentes de medios materiales<sup>2</sup> [100].

En la sección 5.7, dedicada a la contribución de los modos de alta frecuencia, (así como en el Apéndice D donde se describe el cálculo numérico realizado) hemos

<sup>2</sup>Si bien ese tipo de normalizaciones permiten eliminar las contribuciones divergentes infrarrojas dependientes de  $R$ , son inadecuadas para hacer comparaciones para distintos valores de  $a$ , porque en esas diferencias de energías se están comparando situaciones con *distintas cantidades de materia* en cada medio dieléctrico

dado argumentos en favor de que la contribución dominante a la parte finita de la energía de Casimir está efectivamente dada por la expresión (5.56), proveniente de las contribuciones de bajas frecuencias.

Para determinar la fuerza que actúa sobre la superficie de separación entre dieléctricos, se debe imponer la conservación del número de partículas en cada medio. Esta condición lleva a una variación de los índices de refracción con respecto al radio de la burbuja  $a$ . Teniendo en cuenta esa dependencia de los índices con  $a$ , hemos llegado a una expresión para la presión del vacío electromagnético sobre la burbuja,  $P(a)$ , como una función de  $a$  (ver ecuación (5.60)).  $P(a)$ , así construida, se anula cuando  $n_2 = n_1$ , y tiene una derivada negativa con respecto a  $n_2$ . Luego, es negativa para  $n_2 > n_1$ , y tiende a comprimir la burbuja.

Esta presión puede ser integrada para dar la variación de la energía de Casimir con respecto al volumen de la burbuja, para cantidades dadas de materia en los medios dieléctricos (ecuación (5.63)).

Como mencionamos en la introducción, cuando se consideran modelos de dieléctricos que tienen índices de refracción constantes en *todo* el rango de frecuencias, la presencia de divergencias hace difícil dar una interpretación física a la parte finita de la energía de vacío, la que no puede ser aislada de la parte singular. Sin embargo, cuando se supone un comportamiento ultravioleta realista y se emplea la regularización  $\zeta$ , como en el caso estudiado en la sección 5.7, las singularidades pueden ser removidas con un único contratérmino de volumen en la densidad de energía clásica del material. No se necesitan contratérminos de superficie ni de curvatura para mantener finita la energía de Casimir.

Con este comportamiento ultravioleta bajo control, cobran sentido las contribuciones de frecuencia finita en modelos realistas. Más aún, estas contribuciones a (la parte finita de) la energía de vacío (dadas por la ecuación (5.56)) resultan ser las dominantes. Esto fue mostrado en la sección 5.7.1, junto con el cálculo numérico descrito en el Apéndice D, donde se ha analizado la contribución de los modos de alta frecuencia usando el modelo de Drude para la permitividad.

Según ese argumento, el resultado relevante para la parte finita de la energía de Casimir viene dado, efectivamente, por la contribución de las bajas frecuencias, ecuación (5.56), y entonces tiene sentido su aplicación a fenómenos tales como el de la sonoluminiscencia.

Nuestros resultados así obtenidos son consistentes con la propuesta de Schwinger acerca de la relevancia que puede tener la energía de Casimir en esa *transducción* de sonido en luz. En efecto, en el caso de una burbuja esférica de gas sumergida en agua, y tomando el radio de una burbuja sonoluminiscente típica, hemos encontrado una presión electromagnética que es aproximadamente una constante negativa que nos ha permitido estimar el valor de la frecuencia corte  $\Omega$ . Esta cae en la región del espectro visible, en un valor cercano a la región donde el índice de refracción del agua se vuelve esencialmente igual a 1.

Por otro lado, tomando como valor para la frecuencia de corte aquel para el cual ya no es posible la propagación de la luz en el agua, obtenemos un valor para el cambio de la energía de Casimir de la burbuja durante el colapso de alrededor de 35 veces la energía típicamente emitida en cada flash.

Desde luego que la expresión completa de la energía de Casimir contiene además un término de volumen pesado por una constante fenomenológica indeterminada, que recuerda la necesaria sustracción de una divergencia ultravioleta con esa dependencia funcional. Con más precisión, deberíamos decir que nuestros resultados son compatibles con pequeños valores para esa constante fenomenológica.

Estos resultados, obtenidos en el marco de un modelo de dieléctrico *realista* (aunque lo suficientemente sencillo como para ignorar la complicada dependencia del índice de refracción con la frecuencia (ver por ejemplo [34], capítulo 7, figura 7,9)) parecen respaldar claramente las ideas de Schwinger acerca de la importancia de la energía de Casimir en la sonoluminiscencia: la energía de vacío se incrementa con el volumen de la burbuja en una cantidad comparable con la energía del flash, y luego ella está disponible para ser emitida como luz al final del colapso de la burbuja.

Por supuesto que nuestro cálculo cuasi-estático no puede explicar por qué el flash se emite en un breve lapso de tiempo al final del violento colapso que sufre la burbuja. Pero se podría especular acerca de la formación adiabática de un estado excitado del campo electromagnético, el cual sería inducido a decaer a través de algún mecanismo relacionado a la fuerte desaceleración que detiene a la burbuja cuando alcanza su radio mínimo.

# Capítulo 6

## Resumen y conclusiones

Los fenómenos conocidos bajo el nombre general de Efecto Casimir son de naturaleza exclusivamente cuántica, asociada con la presencia de oscilaciones de punto cero en los estados de vacío de los campos cuánticos. El efecto surge como resultado de la distorsión que sufre la energía de vacío de los campos debida a la presencia de contornos, topologías no triviales o campos de background. Este efecto es importante en diversas áreas de la Física, desde Materia Condensada hasta Partículas Elementales y Cosmología.

Debido al progresivo avance en las técnicas experimentales, hoy en día es posible medir las fuerzas de Casimir en experiencias de laboratorio con gran precisión. De hecho, actualmente son tenidas en cuenta como una componente determinante en las fuerzas que actúan sobre micro-dispositivos electro-mecánicos.

El cálculo de energías de Casimir también resulta de interés en temas tales como la búsqueda de una explicación para el fenómeno de la sonoluminiscencia, en el cual una burbuja de gas en un fluido, atrapada en un nodo de velocidad de una onda sonora estacionaria, emite, cerca del final del rápido colapso que sufre la burbuja en cada ciclo, cortos e intensos pulsos de luz con una duración de sólo algunas decenas de picosegundos, en un proceso que concentra la energía en doce órdenes de magnitud.

Estos ejemplos muestran el interés práctico de este problema.

En particular, la idea de dar una explicación al fenómeno de la sonoluminiscencia basada en la energía de Casimir de una burbuja en un medio dieléctrico fue desarrollada inicialmente por Schwinger. Pero sobre ese punto hay aún un considerable desacuerdo.

En efecto, no hay acuerdo acerca de la renormalización necesaria para remover las singularidades que aparecen en la energía de vacío en problemas que involucran medios dieléctricos no dispersivos, un hecho que oscurece la interpretación física de las partes finitas. Como se explicó en el capítulo 2, el por qué de tales desacuerdos está relacionado, por un lado, con la falta de una condición de normalización natural que haga única a la parte finita de la energía de vacío para campos sin masa. Por otro lado, en general el resultado para la parte divergente no es expresable en términos de

funciones simples, de modo que los contratérminos necesarios son extremadamente complicados y la interpretación del modelo clásico asociado es poco clara.

Nuestra propuesta para atacar este problema se basa en la suposición de que estos inconvenientes tienen su origen en el hecho de que los modelos usualmente utilizados para describir medios dieléctricos no incorporan una relación de dispersión realista, dependiente de la frecuencia. Una consecuencia directa de ello es un comportamiento ultravioleta inadecuado, que lleva a la aparición de divergencias que hacen imposible extraer un valor finito para la energía de Casimir de una manera físicamente razonable.

El método que empleamos aquí para analizar la energía de Casimir como función de las propiedades dieléctricas del medio se basa en la suma sobre frecuencias propias del campo electromagnético. Para controlar las contribuciones de las altas frecuencias adoptamos la técnica de la regularización  $\zeta$ , consistente en la extensión analítica de la suma de potencias complejas de las autofrecuencias del campo relevante. Hemos desarrollado un método de cálculo de una función  $\zeta$  adecuada al estudio de la energía de Casimir como función de las propiedades dieléctricas del medio, en principio aplicable a distintas geometrías. En este contexto, las divergencias ultravioletas se presentan como singularidades de la extensión meromorfa de estas funciones, lo que permite separarlas de las partes finitas. Estas ganan sentido físico tras un proceso de renormalización, pudiendo entonces ser comparadas con el experimento.

Así, en el capítulo 3 analizamos el comportamiento de las divergencias ultravioletas presentes en la energía de vacío cuando se utiliza un modelo que describe a un medio dispersivo realista [75]. Este modelo introduce una *frecuencia de plasma* en la permitividad, y tiene una dependencia de la frecuencia que se deduce como consecuencia directa de la relación causal que existe entre el vector campo eléctrico y el vector desplazamiento para medios dispersivos generales (ver sección 2.5). Es en este sentido que hablamos de medios *realistas*. Como resultado mostramos que la energía de Casimir presenta divergencias ultravioletas más suaves que las arrojadas usando, por ejemplo, aproximaciones de medios diluidos. En efecto, encontramos que la estructura de singularidades de la energía de Casimir en el marco de esta regularización es muy simple: la única singularidad que aparece es un polo simple cuyo residuo es proporcional al volumen. Esto permite interpretarla como una contribución a la densidad de energía del material, a ser cancelada por un contratérmino en la densidad de energía clásica del modelo, similarmente a como se hace, por ejemplo, en modelos de la bolsa.

De ese modo, no son necesarios contratérminos de superficie o curvatura. Las divergencias superficiales están ausentes y las de curvatura se cancelan entre sí cuando se suman las contribuciones de los modos transversales eléctricos (TE) y transversales magnéticos (TM). Las mismas conclusiones se obtienen cuando se estudia la estructura de divergencias de la energía de Casimir en un modelo de *metales reales*, ya que la contribución adicional también es proporcional al volumen accesible.

Bajo la hipótesis fundamental de que una relación de dispersión lo suficientemen-

te realista puede actuar como un *regulador natural* de la energía de vacío, nuestra propuesta es que la consideración de propiedades dispersivas sencillas pero realistas en el rango de altas frecuencias conducirá a una estructura simple de las singularidades, de manera que ellas puedan ser separadas de las partes finitas sin necesidad de imponer alguna condición de normalización artificial, mediante contratérminos sencillos en la expresión de la energía clásica del sistema. Luego, las partes finitas ganan sentido físico tras un proceso de renormalización, pudiendo ser comparadas con el experimento [24].

Para el estudio de la partes finitas, como primera medida establecimos, en el capítulo 4, un método de cálculo para un modelo simplificado de un campo escalar confinado a una región con simetría esférica, que simula el comportamiento de los índices de refracción a bajas frecuencias [76]. Allí, calculamos las contribuciones dominantes a la energía de vacío del campo en un modelo con una *condición de contorno dependiente de la frecuencia*, que consiste en el confinamiento al interior de una esfera de radio  $R$  de los modos con frecuencia menor o igual a una frecuencia de corte física  $\Omega$ . Esos modos están sujetos a condiciones de contorno de Dirichlet sobre la superficie de la esfera, mientras que aquellos con frecuencias mayores que  $\Omega$  son libres, pues el contorno les es completamente transparente.

Esta característica del modelo permite la sustracción de la contribución de los modos de alta frecuencia a la energía de vacío, lo que equivale a una redefinición del nivel de referencia de la energía independiente del radio de la burbuja  $R$ . Así, hemos representado la suma sobre las autofrecuencias hasta la frecuencia de corte  $\Omega$  en términos de una función  $\zeta$  *incompleta* asociada con el operador Laplaciano sometido a condiciones de contorno de Dirichlet sobre la superficie de la esfera. Esta función,  $\zeta(s, x)$ , está bien definida sólo para  $\Re(s) > 1$ . Luego fue necesario evaluar su continuación analítica desde  $s > 1$  a los valores relevantes de ese parámetro:  $s = 0$ , necesario para evaluar el momento angular máximo  $l_0 = \nu_0 - 1/2$  correspondiente a autofrecuencias menores o iguales que  $\Omega$ , y  $s = -1$ , necesario para evaluar la contribución a la energía de Casimir de los modos con momento angular  $l = \nu - 1/2 \leq l_0$ . Para ello hemos aproximando el integrando de la función  $\zeta$  incompleta mediante el uso del desarrollo asintótico de Debye para las funciones de Bessel modificadas que aparecen en su expresión.

Este procedimiento nos condujo a una función meromorfa, con polos simples que fueron evaluados exactamente, cuyos residuos resultan ser independientes de la frecuencia de corte. Por otro lado, evaluamos la parte finita de  $\zeta(s, x)$  hasta términos de un orden dado en el desarrollo de Debye. Finalmente, aplicando la formula de suma de Euler-Maclaurin, arribamos a una expresión para la energía de Casimir del modelo en la cual se reconocen contribuciones de volumen y superficie. Para un valor de la frecuencia de corte correspondiente a  $x = R\Omega/c \gg 1$ , donde  $R$  es el radio de la burbuja, los términos dominantes en la energía de vacío son proporcionales al volumen y al área de la burbuja. Como un ejercicio final, empleamos nuestro modelo de prueba para estimar la frecuencia de corte  $\Omega$  necesaria para producir la cantidad de energía emitida por una burbuja sonoluminiscente típica, encontrando

un valor que cae dentro de la región donde el índice de refracción del agua se hace esencialmente igual a uno. Esto alienta a considerar un modelo similar para el caso más realista del campo electromagnético en presencia de medios dieléctricos.

El método de cálculo desarrollado en el capítulo 4 fue utilizado, en el capítulo 5, para estudiar la energía de vacío del campo electromagnético en el background de medios dieléctricos esféricamente simétricos. Allí consideramos un modelo simple de medio dieléctrico dispersivo, donde la descripción de sus propiedades se hace por medio una permitividad dependiente de la frecuencia que toma en consideración de manera realista su respuesta tanto a bajas como a altas frecuencias. El problema así modelado permite evaluar por separado, en ambos rangos de frecuencia, las contribuciones a la energía de Casimir.

En el rango de bajas frecuencias, la permitividad y permeabilidad fueron tomadas como constantes hasta cierta frecuencia de corte común a ambos medios,  $\Omega$ , por encima de la cual ellos resultan indistinguibles. Como en el capítulo 4, esto se refleja en condiciones de contorno dependientes de la frecuencia para el campo electromagnético sobre la superficie de separación entre los medios dieléctricos, la que se vuelve transparente para frecuencias mayores que la de corte. Por otro lado, en el rango de altas frecuencias del campo, la permitividad fue modelada usando el modelo de Drude analizado en el capítulo 3. Por simplicidad limitamos nuestra atención a medios no magnéticos. Luego, hemos estudiado la energía de Casimir de un dieléctrico esférico de radio  $a$  e índice de refracción  $n_1(\omega) = \sqrt{\epsilon_1(\omega)}$  sumergido en un segundo medio de índice  $n_2(\omega) = \sqrt{\epsilon_2(\omega)}$ , todo el sistema encerrado en una gran esfera concéntrica conductora de radio  $R$ .

Como mencionamos antes, las contribuciones de los modos de baja y alta frecuencia ( $\omega \leq \Omega$  y  $\omega > \Omega$  respectivamente) pueden ser calculadas por separado. La contribución a la energía de Casimir de los modos con frecuencia  $\omega \leq \Omega$  se reduce a dos sumas finitas, una para los modos transversales eléctricos (TE) y otra para los modos transversales magnéticos (TM). Siguiendo el método desarrollado en el capítulo 4, hemos representado estas sumas, para cada valor del momento angular  $l = \nu - 1/2$ , como diferencias de las funciones  $\zeta$  incompletas del modelo,  $\zeta_\nu^{TE}(s, x)$  y  $\zeta_\nu^{TM}(s, x)$ . En el Apéndice C derivamos la expresión de la función  $\Delta_\nu^{TE}(z)$ , cuyas raíces determinan las autofrecuencias de los modos TE para esta configuración de medios. También hemos probado que aquellos ceros que caen en el semiplano abierto derecho del plano complejo  $z$  son todos reales y simples. Lo mismo es válido para  $\Delta_\nu^{TM}(z)$ .

El desarrollo asintótico uniforme de Debye para las funciones de Bessel hizo posible un desarrollo sistemático de las funciones  $\zeta$ , hecho que facilitó las continuaciones analíticas necesarias. Reteniendo, en ese desarrollo asintótico los términos necesarios para aislar las partes singulares de las funciones  $\zeta$  incompletas en  $s = -1$ , hemos evaluado tanto las contribuciones de volumen como las primeras correcciones de tamaño finito a la energía de Casimir. De hecho, este método de cálculo nos permite obtener sucesivas contribuciones en la forma de potencias crecientes de  $(a\Omega/c)^{-1}$ .



Así, hemos mostrado que, para  $(a\Omega/c) \gg 1$ , las contribuciones dominantes son términos de volumen, cuyo signo está determinado por la diferencia  $(n_1^3 - n_2^3)$ , más un término positivo proporcional al volumen del espacio accesible al medio exterior que resulta independiente de  $n_1$  y de  $a$ . Por otro lado, las primeras correcciones de tamaño finito a la energía de Casimir son contribuciones de superficie.

Esos resultados, que provienen de la contribución de las *bajas* frecuencias, resultan ser en realidad las contribuciones relevantes a (la parte finita de) la energía de Casimir. En efecto, esto ha sido mostrado calculando explícitamente las partes finitas (y singulares) de la contribución de los modos de alta frecuencia, usando para esto el modelo de Drude del capítulo 3. En ese cálculo (completado con el cálculo numérico descrito en el Apéndice D) hemos mostrado que la contribución más importante a la parte finita de la energía de vacío proviene efectivamente de las bajas frecuencias, donde es válida la aproximación de las permitividades mediante constantes hasta una frecuencia de corte  $\Omega$ .

Con respecto a las singularidades ultravioletas, observamos que se manifiestan a través de un término de volumen y otro que se anula cuando  $R \rightarrow \infty$ . Esto, como esperábamos, está en completo acuerdo con los resultados del capítulo 3.

Habiendo identificado las contribuciones más importantes a la parte finita de la energía de Casimir, tiene sentido su aplicación a fenómenos tales como el de la sonoluminiscencia. Con esa finalidad fueron utilizados estos resultados para determinar la presión electromagnética que actúa sobre la superficie de separación entre dieléctricos. Para ello se debe tener en cuenta la conservación del número de partículas en cada medio. Esta condición, que conlleva una variación de los índices de refracción con respecto al radio de la burbuja ( $a$ ), nos condujo a una expresión para la *presión* de vacío sobre la burbuja,  $P(a)$ , como una función de  $a$ . Integrando esta presión logramos también una expresión para la variación de la energía de Casimir con respecto al volumen de la burbuja (para cantidades fijas de materia en cada medio). Esta expresión es apta para su aplicación a una situación de interés para la sonoluminiscencia.

De esta aplicación, obtuvimos resultados consistentes con la propuesta de Schwinger acerca del papel que puede desempeñar la energía de Casimir en la transformación de sonido en luz en este fenómeno. En efecto, imponiendo valores típicos para el radio de una burbuja sonoluminiscente y para la energía media del flash de luz emitido, pudimos estimar el valor de la frecuencia de corte  $\Omega$ , el cual cae en la región del espectro visible, cercano a la región donde el índice de refracción del agua se vuelve esencialmente igual a 1, un poco por debajo del valor para el cual la propagación de fotones en agua ya no es posible. Este valor es suficientemente alto como para justificar las aproximaciones realizadas.

Estos resultados, obtenidos en el marco de un modelo de dieléctrico *realista* (aunque lo suficientemente sencillo como para ignorar la complicada dependencia del índice de refracción con la frecuencia) parecen respaldar claramente las ideas de

Schwinger acerca de la posibilidad de explicar el fenómeno de la sonoluminiscencia a partir de la energía de Casimir del campo electromagnético. En efecto, la energía de vacío se incrementa con el volumen de la burbuja en una cantidad comparable con la energía en cada flash, la que entonces está disponible para ser emitida como luz al final del colapso de la burbuja.

Desde luego que la expresión completa de la energía de Casimir contiene un término de volumen con una constante fenomenológica indeterminada, remanente del proceso de renormalización donde una singularidad ultravioleta con esa dependencia del radio debió ser cancelada mediante un contratérmino en la densidad de energía del modelo clásico. Con más precisión deberíamos decir que nuestros resultados para la burbuja sonoluminiscente son compatibles con pequeños valores para esa constante fenomenológica.

Como hemos mencionado en la Introducción, dado el estado actual de controversia acerca del Efecto Casimir en medios dieléctricos, su estudio reviste interés tanto desde un punto de vista teórico como para la comparación directa con el experimento. En ese sentido, creemos haber dado en esta tesis un paso en la dirección de clarificar el problema de la renormalización de la energía de vacío en medios dieléctricos, así como en haber actualizado el problema de la importancia que ella tiene en el fenómeno de la sonoluminiscencia.

# Apéndice A

## El fenómeno de la sonoluminiscencia y la propuesta de Schwinger

### A.1. Breve descripción del fenómeno

El de la sonoluminiscencia es un fenómeno único en la mecánica de fluidos, en el sentido de que la energía ingresa en la forma de ondas sonoras (con grandes longitudes de onda), en un régimen en que las ecuaciones de la mecánica de fluidos son aplicables, pero como resultado de un proceso que aún espera una explicación, esa energía es transformada en fotones en el rango del espectro visible (que no pueden ser descritos por las mismas ecuaciones). Como consecuencia de este fenómeno, la energía que transporta la onda sonora es concentrada en *doce ordenes de magnitud* y emitida en la forma de un corto flash de luz.

A un recipiente que contiene agua se aplica una onda sonora (sinusoidal) a su frecuencia de resonancia ( $\sim 26$  kHz). La presión cerca del centro del recipiente es mostrada en la traza **b** de la Figura A.1. Una burbuja de gas (aire, con alguna proporción de un gas noble) es atrapada en el vientre de presión del centro, donde comienza a pulsar a la frecuencia de la onda aplicada. Estas pulsaciones no son sinusoidales: la traza **a** de la Figura A.1 muestra la intensidad de luz de un laser incidente desviada por la burbuja, y es indicativa de la evolución del radio de la burbuja en el tiempo.

La expansión de la burbuja ocurre durante el hemiciclo de rarefacción (diferencia de presión negativa), lo que la lleva desde un radio mínimo de  $4,5 \mu\text{m}$  hasta un radio máximo de  $45 \mu\text{m}$ . Luego ocurre un rápido colapso, durante el cual la pared de la burbuja es acelerada a velocidades supersónicas (unas cuatro veces la velocidad del sonido en el gas de la burbuja). Por un mecanismo aún desconocido, este colapso se traduce, hacia el final del mismo, en un corto e intenso flash de luz, que se muestra en la traza **c**. Simultáneamente, se produce un pulso acústico, que aparece superpuesto a la traza **b**.

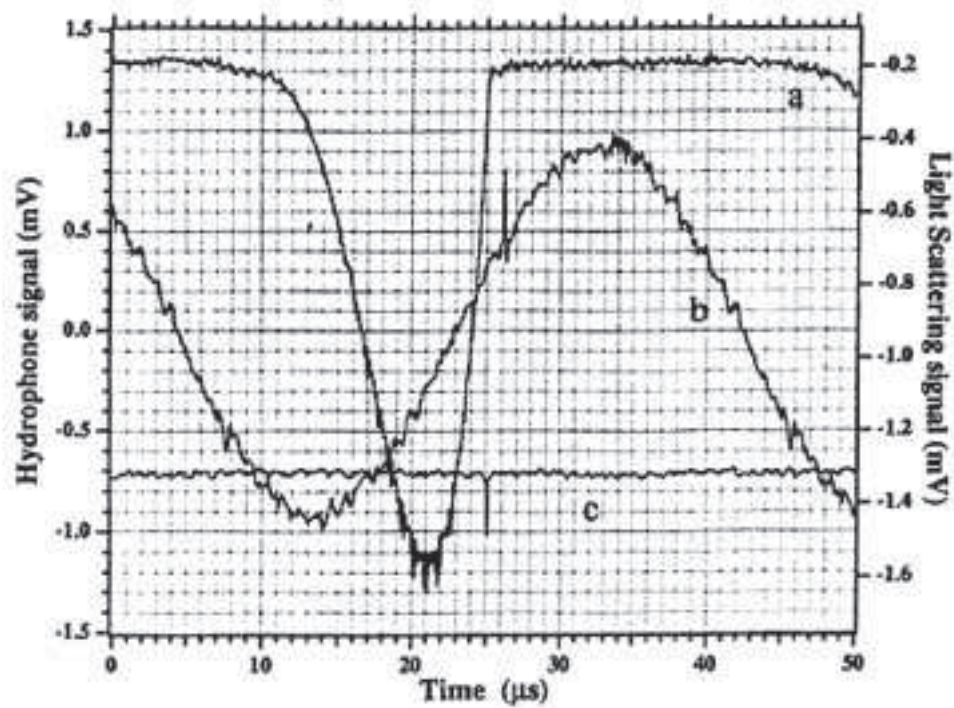


Figura A.1: Gráfico tomado de la referencia [25], que muestra la evolución del radio de la burbuja sonoluminiscente (a), la presión que ejerce sobre ella la onda sonora (b), y la emisión del pulso de luz (c).

La duración del pulso de luz es menor que 50 ps, y ocurre a menos de 0,5 ns del momento en que el radio de la burbuja alcanza su mínimo valor. Cada flash es esféricamente simétrico, y contiene alrededor de un millón de fotones con energías de hasta 6 eV (las frecuencias mayores serían absorbidas por el agua circundante, que resulta opaca en el UV, si bien no hay indicios de disipación de energía en el agua). La potencia promedio emitida durante el flash está entre 30 y 100 mW.

La emisión de este pulso de luz ocurre sincronizadamente con la onda sonora aplicada (un flash cada ciclo), situación que puede mantenerse durante largos períodos. A simple vista (en una habitación a oscuras) puede verse el fenómeno como un punto luminoso parecido a una estrella.

Para estimar la capacidad de concentración de la energía que exhibe la sonoluminiscencia, se puede suponer que la emisión de cada fotón se realiza desde una región del tamaño atómico. Entonces, se puede comparar la energía media entregada a cada átomo por la onda sonora,  $\langle 1/2 (\text{densidad del agua}) (\text{velocidad del fluido})^2 \rangle \times (\text{volumen atómico}) \approx 2 \times 10^{-12} \text{ eV/átomo}$ , con la energía de los fotones más energéticos que se detectan, 6 eV. Con estas hipótesis se concluye que hay un proceso de *concentración de la energía en doce órdenes de magnitud*.

Para observar los resultados de la aplicación de un sonido (que puede ser audible) en un experimento de sonoluminiscencia hay que emplear fotodetectores más rápidos que los empleados en experimentos de partículas elementales. Ocurre así una mezcla de regímenes microscópicos y macroscópicos muy interesante, que puede señalar un formidable paradigma de concentración de energía.

## A.2. La propuesta de Schwinger

Si bien hay una serie de hechos experimentales<sup>1</sup> que muestran que el fenómeno es sumamente complejo, es nuestro propósito explorar una explicación acerca de la disponibilidad de energía para la emisión de fotones, debida a Schwinger [84], basada en la energía de vacío del campo electromagnético.

A pesar de que Schwinger llamó a su modelo el *efecto Casimir dinámico*, su aproximación es cuasi-estática. Ella está basada en la comparación de dos energías de Casimir estáticas para medios dieléctricos, considerando la burbuja con sus radios máximo y mínimo (cálculo para el que aún hoy existe un considerable desacuerdo acerca de la forma correcta de hacerlo).

Lo que Schwinger mostró en un modelo muy simplificado de electrodinámica escalar, empleando una representación de *tiempo propio* para la acción efectiva del campo, es que la contribución dominante (*de volumen*) a la energía de Casimir de una burbuja de radio  $a$  (con constante dieléctrica  $\epsilon_1$ ) inmersa en un dieléctrico de

---

<sup>1</sup>Como el hecho de que el agua sea el líquido más adecuado para la sonoluminiscencia, la fuerte dependencia de la intensidad del pulso de luz con la temperatura del agua, o el hecho de que la presencia de un gas noble sea esencial para que se produzca la emisión

constante  $\epsilon_2$  estaría dada por

$$\begin{aligned}
 E_{burbuja} &= 2V \int^K \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\hbar}{2} [\omega_1(k) - \omega_2(k)] + \dots = \\
 &= \frac{\hbar c a^3 K^4}{6\pi} \left( \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} \right) + \dots,
 \end{aligned}
 \tag{A.1}$$

donde  $K$  es un cut-off en el número de onda (a ser tomado en el UV), más allá del cual los índices de refracción  $n_1$  y  $n_2$  se reducen al del vacío (y, por lo tanto, es un cut-off con un sentido físico directo). La integral del miembro de la derecha (donde se ha empleado la densidad de estados en el límite de grandes volúmenes) permite interpretar esta contribución como la diferencia de energías de vacío debida a las diferentes relaciones de dispersión de ambos medios dieléctricos.

Las principales ventajas de este modelo serían:

- que permite explicar la energía emitida como energía de Casimir disponible al disminuir el radio de la burbuja (tomando  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 1,3$  y  $K$  en la región del UV se obtiene una diferencia de energías del orden de la emitida en el flash de luz);
- que se explica la no producción de fotones en el UV en razón de que a partir de esa región del espectro las propiedades dieléctricas de ambos medios son iguales, y en consecuencia no hay diferencia de energías de vacío para altas frecuencias.

Este modelo, que no considera el mecanismo de emisión que se pone en juego, se ve complementado con los trabajos de Visser y colaboradores [30, 31, 32, 33], en los cuales (considerando el muy rápido colapso de la burbuja en la sonoluminiscencia) se estima el espectro de fotones emitidos por un brusco cambio en las propiedades dieléctricas del medio (y en el límite de grandes radios  $a$ ) calculando los coeficientes de Bogoliubov que relacionan los estados del campo electromagnético en presencia de uno y otro medio dieléctrico.

No obstante la sencillez y atractivo de la explicación propuesta por Schwinger, la forma en que debe hacerse este cálculo es aún objeto de debate, existiendo una considerable controversia al respecto. En efecto, Milton y colaboradores [97, 63] han criticado duramente el resultado de Schwinger, sosteniendo que el término de volumen debe descartarse mediante un procedimiento de renormalización de la energía del vacío (procedimiento que, a su vez, es criticado por inconsistente por los autores antes mencionados).

De ese modo, éste es aún un problema abierto.

# Apéndice B

## Funciones espectrales

### B.1. Introducción

En el ejemplo del campo escalar dado en el capítulo 2, la energía de vacío fue regularizada mediante dos métodos distintos: el método de la función zeta y el del cutoff exponencial. Ambos métodos están basados en el uso de funciones espectrales, que son funcionales del espectro de un determinado operador diferencial asociado con las correcciones al orden de 1-loop.

Aquí revisaremos bajo qué condiciones se pueden definir tales funciones, enfocando la atención en la definición y propiedades de la función zeta. La discusión está enmarcada en el formalismo de operadores diferenciales elípticos y problemas de contorno y, por lo tanto, son necesarias algunas definiciones previas. Comenzaremos con el caso de operadores diferenciales definidos sobre variedades sin borde.

Sea  $M$  una variedad compacta sin contorno de dimensión  $n$ , y  $E$  un fibrado sobre  $M$ .

Definición: Un operador en derivadas parciales de orden  $m \in \mathbb{N}$ , actuando sobre secciones de  $E$  se puede escribir, en coordenadas locales, como

$$A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha, \quad (\text{B.1})$$

donde  $a_\alpha(x) \in C^\infty$  y,

$$D_x^\alpha = \prod_{j=1}^n \left( -i \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^{\alpha_j} \text{ y } |\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j. \quad (\text{B.2})$$

En (B.1), en general los coeficientes  $a_\alpha(x)$  son matrices  $q \times q$ .

Definición: El símbolo de un operador diferencial  $A$  se define como

$$\sigma(A) = \sigma(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha, \quad (\text{B.3})$$

y es el polinomio de orden  $m$  en la variable dual  $\xi$  obtenida del reemplazo formal de  $D_x^\alpha$  por el monomio  $\xi^\alpha$ .

En términos del símbolo, la acción del operador sobre funciones en su dominio, se escribe

$$A f(x) = \int d\xi \exp^{ix\xi} \sigma(x, \xi) \tilde{f}(\xi), \quad (\text{B.4})$$

donde  $\tilde{f}(\xi)$  es la transformada de Fourier de  $f(x)$ .

Definición: El símbolo principal es la parte de mayor orden del símbolo. Es un polinomio homogéneo de grado  $m$  en  $\xi$ :

$$\sigma_m(A) = \sigma_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha. \quad (\text{B.5})$$

Si  $P$  y  $Q$  son dos operadores diferenciales de orden  $d$  y  $e$ , respectivamente,

$$P = \sum_{n=0}^d P_n(x)(-i\partial_x)^n, \quad Q = \sum_{n=0}^e Q_n(x)(-i\partial_x)^n, \quad (\text{B.6})$$

sus símbolos están dados por,

$$\sigma(P) = \sum_{n=0}^d P_n(x)p^n, \quad \sigma(Q) = \sum_{n=0}^e Q_n(x)p^n. \quad (\text{B.7})$$

Utilizando la regla de Leibnitz, se puede ver que la composición  $PQ$  es un operador diferencial de orden  $e + d$  cuyo símbolo  $\sigma(PQ)$  está dado por,

$$\begin{aligned} \sigma(PQ) &= \sigma \left\{ \sum_{n=0}^d \sum_{m=0}^e P_n(x)(-i\partial_x)^n (Q_m(x)(-i\partial_x)^m) \right\} = \\ &= \sum_{n=0}^d \sum_{m=0}^e P_n(x) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-i\partial_x)^k (Q_m(x)) p^{m+n-k} = \\ &= \sum_{n=0}^d \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_n(x) \frac{(n-k)!}{n!} \partial_p^k p^n (-i\partial_x)^k (\sigma(Q)) = \\ &= \sum_{k=0}^d \sum_{n=k}^d \frac{1}{k!} P_n(x) \partial_p^k p^n (-i\partial_x)^k (\sigma(Q)) = \\ &= \sum_{k=0}^d \frac{1}{k!} \partial_p^k (\sigma(P)) \cdot (-i\partial_x)^k (\sigma(Q)). \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Definición: Un operador diferencial se dice elíptico si su símbolo principal es invertible para  $|\xi| = 1$  (tiene autovalores no nulos para  $|\xi| = 1$  o, de manera equivalente,  $\det \sigma_m(x, \xi) \neq 0$  para  $|\xi| = 1$ ).



Antes de definir las funciones espectrales de un operador diferencial  $A$ , entre las que se cuenta la traza de la resolvente  $(A - \lambda)^{-1}$ , conviene repasar la relación que existe entre el núcleo y el símbolo de un operador integral  $P$ .

La acción de un operador integral  $P$  sobre una función  $f(x)$  de su dominio está dada por,

$$Pf(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x, x') f(x') dx'. \quad (\text{B.9})$$

La función  $K(x, y)$  es el núcleo del operador  $P$ .

Se demuestra que la relación que existe entre el núcleo  $K(x, y)$  del operador  $P$  y su símbolo  $\sigma(P)$ , es la siguiente:

$$K(x, x') = \int_{\mathbb{R}} e^{-ip(x-x')} \sigma(P)(x, p) \frac{dp}{2\pi}. \quad (\text{B.10})$$

De acuerdo con esta expresión, el valor del núcleo  $K(x, x')$  para  $x = x'$ , se escribe,

$$K(x, x) = \int_{\mathbb{R}} \sigma(P)(x, p) \frac{dp}{2\pi}. \quad (\text{B.11})$$

## B.2. Funciones espectrales

Consideremos, sobre una variedad  $M$  de dimensión  $n$  con borde, un operador diferencial autoadjunto  $A$  de orden  $d$  que admite un conjunto de autovalores reales  $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  correspondientes a autovectores  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  que forman una base ortonormal y completa del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . El dominio  $\mathcal{D}(A)$  del operador está caracterizado por condiciones de contorno que aseguran que  $A$  sea autoadjunto.

Definiremos tres funciones espectrales de interés asociadas al operador  $A$ . Todas ellas corresponden a la traza de sendos operadores integrales:  $(A - \lambda)^{-1}$ ,  $e^{-tA}$ ,  $A^{-s}$ ; siendo  $\lambda \in \mathbb{C} - \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$  y  $s \in \mathbb{C}$  con  $\Re(s)$  suficientemente grande. Estos operadores están caracterizados por sus respectivos núcleos:  $G(x, x', \lambda)$ ,  $K(x, x', t)$ ,  $\zeta_A(x, x', s)$ . El operador  $(A - \lambda)^{-1}$  es la resolvente,  $K(x, x', t)$  es el heat-kernel y  $\zeta_A(s) := \text{Tr } A^{-s}$  es la función- $\zeta$  del operador diferencial  $A$ .

Enunciamos a continuación algunas propiedades de estos operadores integrales:

- Dada una función  $f(x) \in \mathcal{H}$ , el operador  $(A - \lambda)^{-1}$  permite resolver la ecuación diferencial:

$$(A - \lambda)\phi(x) = f(x), \quad (\text{B.12})$$

en la que  $\phi(x)$  satisface las condiciones de contorno sobre el borde  $\partial M$  que definen el dominio del operador  $A$ . La solución de este problema está dada por,

$$\phi(x) = (A - \lambda)^{-1} f(x), \quad (\text{B.13})$$

siendo  $(A - \lambda)^{-1}$  un operador integral cuyo núcleo es,

$$G(x, x', \lambda) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\phi_n(x) \phi_n^*(x')}{\lambda_n - \lambda}. \quad (\text{B.14})$$

En consecuencia, la traza de la resolvente está dada por,

$$\text{Tr}(A - \lambda)^{-1} = \int_M G(x, x, \lambda) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\lambda_n - \lambda}. \quad (\text{B.15})$$

La convergencia de la serie en la ecuación (B.15) está condicionada por el comportamiento asintótico de los autovalores de  $A$  que, como veremos en esta misma sección, se rige por la estructura de singularidades de la función  $\zeta_A(s)$ .

En el caso de operadores regulares sobre variedades compactas sin borde, o con borde suave y bajo condiciones de contorno locales, las singularidades de la función  $\zeta_A(s)$  están dadas por una sucesión de polos simples  $s_n$  ubicados en puntos del eje real dados por [70, 71, 72],

$$s_n = \frac{m - n}{d} \quad \text{con} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{B.16})$$

donde la cantidad  $m$  designa la dimensión de la variedad  $M$  y  $d$  el orden del operador diferencial  $A$ . Se puede demostrar que esto implica un comportamiento asintótico de los autovalores de la forma  $\lambda_n \sim n^{d/m}$ . En consecuencia, la serie de la ecuación (B.15) converge, para operadores regulares, si el orden  $d$  del operador diferencial es mayor que la dimensión  $m$  de la variedad.

- Si  $A$  es un operador diferencial positivo definido, podemos resolver el sistema:

$$\begin{aligned} (\partial_t + A)\phi(x, t) &= 0, \\ \phi(x, t=0) &= f(x), \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

donde  $x \in M$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$  y  $\phi(x, t)$  satisface las condiciones de contorno apropiadas sobre  $\partial M$ . El problema planteado por las expresiones (B.17) puede invertirse de la siguiente manera,

$$\phi(x, t) = e^{-tA} f(x), \quad (\text{B.18})$$

donde  $e^{-tA}$  es un operador integral cuyo núcleo está dado por,

$$K(x, x', t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-t\lambda_n} \phi_n(x) \phi_n^*(x'), \quad (\text{B.19})$$

y su traza por,

$$\text{Tr} e^{-tA} = \int_M K(x, x, t) dx = \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-t\lambda_n}. \quad (\text{B.20})$$

- En [70], R.T. Seeley definió las potencias  $A^{-s}$  de un operador diferencial  $A$  y demostró que si  $\mathcal{R}(s)$  es suficientemente grande,  $A^{-s}$  tiene un núcleo continuo  $\zeta_A(x, x', s)$ . Además, si  $x \neq x'$  el núcleo  $\zeta_A(x, x', s)$  es una función entera de  $s$ , en tanto que  $\zeta_A(x, x, s)$  admite una extensión meromorfa al plano complejo  $s$  con polos simples dados por la ecuación (B.16).

La traza del operador  $A^{-s}$  está dada por,

$$\zeta_A(s) := \text{Tr } A^{-s} = \int_M \zeta_A(x, x, s) dx = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n^{-s}. \quad (\text{B.21})$$

### B.2.1. Relación entre la distintas funciones espectrales

En la sección anterior hemos definido las trazas  $\text{Tr } (A - \lambda)^{-1}$ ,  $\text{Tr } e^{-tA}$  y  $\text{Tr } A^{-s}$ , que son funciones de los parámetros  $\lambda, t, s$  y están determinadas por el espectro del operador diferencial  $A$ . Cabe, entonces, esperar que existan relaciones entre estas funciones espectrales; veremos, en particular, que los desarrollos asintóticos de  $\text{Tr } (A - \lambda)^{-1}$  y  $\text{Tr } e^{-tA}$  para grandes valores de  $|\lambda|$  y pequeños valores de  $t$ , respectivamente, están determinados por las singularidades de la función  $\zeta_A(s)$ .

Señalamos, en primer lugar, que las funciones espectrales correspondientes a un operador diferencial positivo definido  $A$  satisfacen las siguientes relaciones:

$$\text{Tr } (A - \lambda)^{-1} = \int_0^\infty e^{t\lambda} \text{Tr } e^{-tA} dt, \quad (\text{B.22})$$

$$\text{Tr } A^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \text{Tr } e^{-tA} dt, \quad (\text{B.23})$$

si  $\mathcal{R}(\lambda)$  es menor que todos los autovalores de  $A$  y  $\mathcal{R}(s) > m/d$ , respectivamente. De acuerdo con estas expresiones la transformada de Laplace de la traza del heat-kernel es la traza de la resolvente y su transformada de Mellin es la función  $\zeta_A(s)$ . Estas relaciones pueden demostrarse estableciendo relaciones similares entre cada uno de los términos de la series (B.20), (B.15 y (B.21).

Por otro lado, se demuestra [4] que la traza del heat-kernel,  $\text{Tr } e^{-tA}$  satisface el siguiente desarrollo asintótico para pequeños valores de  $t$ ,

$$\text{Tr } e^{-tA} \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n(A) \cdot t^{\frac{-m+n}{2}}, \quad (\text{B.24})$$

donde los coeficientes  $c_n(A)$  están dados por,

$$\begin{aligned} c_{2k}(A) &= \frac{1}{(4\pi)^{m/2}} \int_M c_{2k}(A, x) d\mu(x) + \frac{1}{(4\pi)^{m/2}} \int_{\partial M} c_{2k}^b(A, x) d\mu^b(x), \\ c_{2k+1}(A) &= \frac{1}{(4\pi)^{(m-1)/2}} \int_{\partial M} c_{2k+1}^b(A, x) d\mu^b(x), \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

siendo  $d\mu(x)$  y  $d\mu^b(x)$  medidas de integración sobre la variedad y sobre su borde, respectivamente.

Mediante una integración por partes en la ecuación (B.23) y utilizando el desarrollo asintótico (B.24) se puede probar,

$$\zeta(0) = c_m(A). \quad (\text{B.26})$$

Cabe señalar que para un operador diferencial autoadjunto  $A$  que no sea positivo definido, para el cual no existe un operador  $e^{-tA}$  asociado, se pueden, sin embargo, definir los operadores integrales  $A^{-s}$  y  $(A - \lambda)^{-1}$ , cuyas trazas están relacionadas por,

$$\text{Tr } A^{-s} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \lambda^{-s} \text{Tr } (A - \lambda)^{-1} d\lambda, \quad (\text{B.27})$$

donde  $\mathcal{C}$  es una curva que encierra a los autovalores de  $A$  en sentido antihorario. La relación (B.27) puede demostrarse en forma inmediata a partir de la ecuación (B.15), que indica que la traza de la resolvente tiene polos simples en los autovalores de  $A$  con residuos igual a 1.

Supongamos ahora que la traza del heat-kernel admite un desarrollo asintótico para valores pequeños de  $t$  de la forma,

$$\text{Tr } e^{-tA} \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n(A) \cdot t^{j_n}. \quad (\text{B.28})$$

Reemplazando este desarrollo asintótico en la expresión (B.22) obtenemos el siguiente desarrollo asintótico para la traza de la resolvente,

$$\text{Tr } (A - \lambda)^{-1} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(j_n + 1) c_n(A) \cdot \lambda^{-j_n-1}. \quad (\text{B.29})$$

El desarrollo asintótico de la traza del heat-kernel describe también las singularidades de la función  $\zeta_A(s)$ . En efecto, las ecuaciones (B.28) y (B.23) indican que los polos de la función  $\zeta_A(s)$  están ubicados en los puntos  $s_n$ ,

$$s_n = -j_n, \quad (\text{B.30})$$

y los residuos correspondientes están dados por,

$$\text{Res}\{\zeta_A(s)\}_{s=s_n} = \frac{c_n(A)}{\Gamma(-j_n)}. \quad (\text{B.31})$$

En consecuencia, el desarrollo asintótico de la traza del heat-kernel para pequeños valores de  $t$ , el desarrollo asintótico de la traza de la resolvente para grandes valores de  $|\lambda|$  y las singularidades de la función  $\zeta_A(s)$  están relacionados en virtud de las ecuaciones (B.22) y (B.23). En particular, si la traza del heat-kernel admite

un desarrollo en potencias de  $t$  (véase la ecuación (B.28)) entonces la traza de la resolvente admite un desarrollo en potencias de  $\lambda$  cuyos exponentes y coeficientes se pueden expresar en términos de los exponentes y coeficientes del primero. La función  $\zeta_A(s)$ , por su parte, presenta polos simples en puntos del eje real que están determinados por los exponentes de  $t$  y sus residuos están, a su vez, determinados por los coeficientes de las potencias de  $t$ .

Por consiguiente, de acuerdo con el resultado (B.16), válido para operadores diferenciales  $A$  con coeficientes regulares, definidos por condiciones de contorno locales sobre el borde de una variedad compacta, las potencias  $j_n$  de  $t$  en los desarrollos (B.28) y (B.29) son,

$$j_n = \frac{n - m}{d}, \quad (\text{B.32})$$

siendo  $d$  el orden del operador  $A$  y  $m$  la dimensión de la variedad de base  $M$  (véase, *e.g.*, la ecuación (B.24).) El resultado (B.16) indica que los exponentes de las potencias de  $\lambda$  y de  $t$  en los desarrollos asintóticos de las trazas de la resolvente y del heat-kernel correspondientes a operadores regulares están determinados por el orden del operador diferencial y la dimensión de la variedad.

Finalizamos este apéndice haciendo una observación con respecto a la relación entre las distintas funciones espectrales. Las ecuaciones (B.22) y (B.23) permiten relacionar las singularidades de la función  $\zeta_A(s)$  con los desarrollos asintóticos de las trazas de la resolvente y del heat-kernel, aún cuando estos desarrollos contengan logaritmos de  $|\lambda|$  y de  $t$ , respectivamente. En ese caso, puede verse que la función  $\zeta_A(s)$  presenta polos de multiplicidad mayor.



## Apéndice C

# Autofrecuencias de los modos TE y TM

### C.1. Introducción

En este apéndice estudiaremos las soluciones de la ecuación (5.5), sujetas a las condiciones de contorno para los modos TE, ecuación (5.3). Derivaremos la expresión de la función  $\Delta_{l+1/2}^{TE}(z)$  dada la ecuación (5.6), cuyas raíces determinan las autofrecuencias, y mostraremos que todos sus ceros que están en el semiplano abierto derecho de la variable  $z$  son reales y simples [102], una condición que permite la representación integral de la ecuación (5.11). En particular, esto implica que la única degeneración de las autofrecuencias es  $(2l + 1)$ , debida a la simetría esférica del problema.

Para eso, es conveniente definir

$$s = s(r) = \begin{cases} \mu_1 r, & r \leq a \\ \mu_2 r + a_1 - a_2, & r > a \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

donde  $a_{1,2} = \mu_{1,2} a$ , lo cual implica que

$$r = r(s) = \begin{cases} \frac{1}{\mu_1} s, & s \leq a_1 \\ \frac{1}{\mu_2} [s - a_1 + a_2], & s > a_1 \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

Expresando  $\varphi(s) := r f_l(r)$  en términos de la nueva variable, teniendo en cuenta que

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{ds}{dr} \frac{d\varphi}{ds} = \mu_k \frac{d\varphi}{ds}, \quad (\text{C.3})$$

con  $k = 1$  ( $k = 2$ ) para  $r < a$  ( $r > a$ ), y llamando

$$\epsilon(s) = \epsilon_1 \Theta(a_1 - s) + \epsilon_2 \Theta(s - a_1), \quad \mu(s) = \mu_1 \Theta(a_1 - s) + \mu_2 \Theta(s - a_1), \quad (\text{C.4})$$

de (5.5) resulta la ecuación diferencial (con coeficientes discontinuos)

$$\hat{\mathcal{L}}_l \varphi(s) = \frac{\mu(s)}{\epsilon(s)} \left\{ \frac{d^2}{ds^2} - \frac{l(l+1)}{[s - (a_1 - a_2)\Theta(s - a_1)]^2} \right\} \varphi(s) = -\frac{\omega^2}{c^2} \varphi(s), \quad (\text{C.5})$$

para  $s \neq a_1$  y  $l = 0, 1, 2, \dots$

Por otro lado, la ecuación (5.3) deviene en las condiciones de continuidad

$$\varphi(s = a_1^+) = \varphi(s = a_1^-), \text{ y } \varphi'(s = a_1^+) = \varphi'(s = a_1^-). \quad (\text{C.6})$$

Luego, estamos buscando las soluciones de (C.5) con una derivada primera continua,  $\varphi(s) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$ .

En la sección siguiente mostraremos que la ecuación (C.5) para esa clase de funciones, complementada con condiciones de contorno adecuadas, define un operador autoadjunto. Esto excluye la posibilidad de autovalores  $-\omega^2/c^2$  no reales. En la Sección C.3 obtendremos la función  $\Delta_\nu^{TE}(z)$  y, finalmente, en la Sección C.4 mostraremos que los ceros no nulos de  $\Delta_\nu^{TE}(z)$  son simples.

## C.2. Hermiticidad

Vamos a considerar el operador  $\mathcal{L}_l$  definido como el operador diferencial  $\hat{\mathcal{L}}_l$  en el lado izquierdo de la ecuación (C.5), con un dominio restringido a  $\mathcal{D}(\mathcal{L}_l) = \mathcal{C}_0^\infty[0, s_0] \subset \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^+, (\epsilon/\mu)(s) ds)$ , donde  $s_0 = \mu_2 R + a_1 - a_2$  (con  $R > a$ ). Aquí,  $\mathcal{C}_0^\infty[0, s_0]$  es el espacio de funciones con derivadas continuas de todos los órdenes, e idénticamente nulas en alguna vecindad de 0 y  $s_0$ . Claramente,  $\mathcal{L}_l$  es simétrico sobre  $\mathcal{D}(\mathcal{L}_l)$ ,

$$(\varphi_1, \mathcal{L}_l \varphi_2)_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^+, (\epsilon/\mu)(s) ds)} = (\mathcal{L}_l \varphi_2, \varphi_1)_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^+, (\epsilon/\mu)(s) ds)}. \quad (\text{C.7})$$

Su adjunto [110],  $\mathcal{L}_l^\dagger$ , está definido sobre el subespacio de funciones

$$\psi \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_l^\dagger) \subset \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^+, (\epsilon/\mu)(s) ds) \quad (\text{C.8})$$

para el cual hay una función  $\chi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^+, (\epsilon/\mu)(s) ds)$  tal que

$$(\psi, \mathcal{L}_l \varphi)_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^+, (\epsilon/\mu)(s) ds)} = (\chi, \varphi)_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^+, (\epsilon/\mu)(s) ds)}, \quad (\text{C.9})$$

para toda  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_l)$ . Luego,  $\mathcal{L}_l^\dagger \psi \equiv \chi$ , o sea que el adjunto está definido sobre el subespacio  $\mathcal{D}(\mathcal{L}_l^\dagger) \subset \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^+, (\epsilon/\mu)(s) ds)$ .

Podemos escribir,

$$((\epsilon/\mu)(s) \chi(s), \varphi(s))_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^+, ds)} = (\psi(s), [\varphi''(s) - V_l(s)\varphi(s)])_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^+, ds)}, \quad (\text{C.10})$$

donde  $V_l(s) = l(l+1)/[s - (a_1 - a_2)\Theta(s - a_1)]^2$ .

Como  $(\epsilon/\mu)(s)$  y  $V_l(s)$  son localmente acotadas, la segunda derivada débil de  $\psi \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_l^\dagger)$  es localmente sumable:

$$\begin{aligned} (\psi''(s), \varphi(s))_{\mathcal{C}_0^\infty[0, s_0]} &\equiv (\psi(s), \varphi''(s))_{\mathcal{C}_0^\infty[0, s_0]} = \\ &= ([(\epsilon/\mu)(s) \chi(s) + V_l(s)\psi(s)], \varphi(s))_{\mathcal{C}_0^\infty[0, s_0]}, \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$



para todo  $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty[0, s_0]$ . Luego,  $\psi'(s)$  es absolutamente continua sobre  $[0, s_0]$ , y  $\psi(s) \in \mathcal{C}^1[0, s_0]$ . Entonces podemos integrar dos veces por partes en el lado izquierdo de la ecuación (C.9) sin producir contribuciones de contorno.

En consecuencia,  $\mathcal{D}(\mathcal{L}_l^\dagger)$  es el subespacio de  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^+, (\epsilon/\mu)(s) ds)$  que contiene aquellas funciones  $\psi(s)$  con una derivada primera absolutamente continua, y tal que  $\psi''(s) - V_l(s)\psi(s) \in \mathbf{L}^2([0, \delta], ds)$ , para  $\delta > 0$  (sin imponer sobre ella ninguna condición de contorno). Para  $\psi \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_l^\dagger)$  tenemos

$$\mathcal{L}_l^\dagger \psi(s) = \left(\frac{\mu}{\epsilon}\right)(s) \left\{ \frac{d^2}{ds^2} - \frac{l(l+1)}{[s - (a_1 - a_2)\Theta(s - a_1)]^2} \right\} \psi(s), \quad (\text{C.12})$$

para  $s \neq a_1$ , o sea que para esas funciones la acción de  $\mathcal{L}_l^\dagger$  se reduce a la aplicación del operador diferencial  $\hat{\mathcal{L}}_l$ .

Para determinar los índices de deficiencia de  $\mathcal{L}_l$ , debemos buscar soluciones linealmente independientes de

$$\mathcal{L}_l^\dagger \psi(s) = \pm i\psi(s) \quad (\text{C.13})$$

en  $\mathcal{D}(\mathcal{L}_l^\dagger)$ . Notar que las derivadas segundas de tales funciones son continuas para  $s \neq a_1$ .

En particular, si  $\psi(s)$  es una solución de

$$\mathcal{L}_l^\dagger \psi(s) = +i\psi(s), \quad (\text{C.14})$$

luego su compleja conjugada  $\psi(s)^*$  es una solución de  $\mathcal{L}_l^\dagger \psi(s) = -i\psi(s)$ , lo cual implica que  $\mathcal{L}_l$  tiene índices de deficiencia iguales, admitiendo así extensiones auto-adjuntas:

$$\begin{aligned} n_\pm(\mathcal{L}_l) &= \dim \text{Ker}(\mathcal{L}_l^\dagger \mp i), \\ n_-(\mathcal{L}_l) &= n_+(\mathcal{L}_l). \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Específicamente, buscamos soluciones en  $\mathcal{C}^\infty$  de

$$\left\{ \frac{d^2}{dz_1^2} - \left[ 1 + \frac{l(l+1)}{z_1^2} \right] \right\} \psi(s) = 0, \quad (\text{C.16})$$

con  $z_1 = e^{i\pi/4} \sqrt{\epsilon_1/\mu_1} s$ ,  $s < a_1$ , y de

$$\left\{ \frac{d^2}{dz_2^2} - \left[ 1 + \frac{l(l+1)}{z_2^2} \right] \right\} \psi(s) = 0, \quad (\text{C.17})$$

con  $z_2 = e^{i\pi/4} \sqrt{\epsilon_2/\mu_2} (s - a_1 + a_2)$ ,  $s > a_1$ .

Llamando  $\mathcal{I}_\nu(z) := \sqrt{z} I_\nu(z)$ , y  $\mathcal{K}_\nu(z) := \sqrt{z} K_\nu(z)$ , donde  $I_\nu(z)$  y  $K_\nu(z)$  son las funciones de Bessel modificadas, tenemos

$$\psi(s) = A_1 \mathcal{I}_{l+1/2}(z_1) + B_1 \mathcal{K}_{l+1/2}(z_1), \quad \text{para } s < a_1, \quad (\text{C.18})$$

$$\psi(s) = A_2 \mathcal{I}_{l+1/2}(z_2) + B_2 \mathcal{K}_{l+1/2}(z_2), \quad \text{para } s > a_1.$$

La solución debe satisfacer también las condiciones de continuidad,  $\psi(s = a_1^+) = \psi(s = a_1^-)$  y  $\psi'(s = a_1^+) = \psi'(s = a_1^-)$ , las que implican

$$\begin{aligned} A_1 \mathcal{I}_{l+1/2}(\bar{z}_1) + B_1 \mathcal{K}_{l+1/2}(\bar{z}_1) &= \\ &= A_2 \mathcal{I}_{l+1/2}(\bar{z}_2) + B_2 \mathcal{K}_{l+1/2}(\bar{z}_2) \\ \sqrt{\epsilon_1/\mu_1} \left\{ A_1 \mathcal{I}'_{l+1/2}(\bar{z}_1) + B_1 \mathcal{K}'_{l+1/2}(\bar{z}_1) \right\} &= \\ = \sqrt{\epsilon_2/\mu_2} \left\{ A_2 \mathcal{I}'_{l+1/2}(\bar{z}_2) + B_2 \mathcal{K}'_{l+1/2}(\bar{z}_2) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

con  $\bar{z}_{1,2} = e^{i\pi/4} \epsilon \sqrt{\mu_k \epsilon_k}$ .

Teniendo en cuenta que

$$\mathcal{I}_{l+1/2}(z) = \frac{z^{l+1}}{2^{l+1/2} \Gamma(l+3/2)} (1 + \mathcal{O}(z^2)), \quad (\text{C.20})$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{l+1/2}(z) &= \frac{2^{l+1/2} \pi}{2 \sin((l+1/2)\pi) \Gamma(1/2-l)} \frac{1}{z^l} (1 + \mathcal{O}(z^2)) - \\ &- \frac{\pi z^{l+1}}{2 \sin((l+1/2)\pi) \Gamma(l+3/2)} \frac{1}{2^{l+1/2}} (1 + \mathcal{O}(z^2)), \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

la condición  $\psi(s) \in \mathbf{L}^2([0, \delta], ds)$  implica que  $B_1 = 0$  para  $l \geq 1$ , mientras que para  $l = 0$  debemos retener ambas soluciones linealmente independientes.

Luego, para  $l \geq 1$ , escribiendo  $A = A_2/A_1$  y  $B = B_2/A_1$ , tenemos de la ecuación (C.18)

$$\begin{pmatrix} \mathcal{I}_{l+1/2}(\bar{z}_2) & \mathcal{K}_{l+1/2}(\bar{z}_2) \\ \mathcal{I}'_{l+1/2}(\bar{z}_2) & \mathcal{K}'_{l+1/2}(\bar{z}_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_{l+1/2}(\bar{z}_1) \\ \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_2}{\epsilon_2 \mu_1}} \mathcal{I}'_{l+1/2}(\bar{z}_1) \end{pmatrix}. \quad (\text{C.22})$$

El determinante de la matriz del lado izquierdo es igual al Wronskiano  $\mathbf{W}[\mathcal{I}_{l+1/2}(\bar{z}_2), \mathcal{K}_{l+1/2}(\bar{z}_2)] = M_0$ , una constante  $\neq 0$ . Luego, existe siempre una (y sólo una) solución de las ecuaciones (C.17) y (C.19) en  $\mathcal{D}(\mathcal{L}_l^\dagger)$ , siendo, en consecuencia,  $n_+(\mathcal{L}_l) = 1 = n_-(\mathcal{L}_l)$  para  $l \geq 1$ . Esa solución está dada por

$$\begin{aligned} A &= \left( \mathcal{K}'_{l+1/2}(\bar{z}_2) \mathcal{I}_{l+1/2}(\bar{z}_1) - \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_2}{\epsilon_2 \mu_1}} \mathcal{K}_{l+1/2}(\bar{z}_2) \mathcal{I}'_{l+1/2}(\bar{z}_1) \right) / M_0, \\ B &= \left( -\mathcal{I}'_{l+1/2}(\bar{z}_2) \mathcal{I}_{l+1/2}(\bar{z}_1) + \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_2}{\epsilon_2 \mu_1}} \mathcal{I}_{l+1/2}(\bar{z}_2) \mathcal{I}'_{l+1/2}(\bar{z}_1) \right) / M_0. \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Así, existe una familia de un parámetro de extensiones autoadjuntas de  $\mathcal{L}_l$  (para  $l \geq 1$ ), que están en correspondencia uno a uno con los mapeos unitarios de  $\text{Ker}(\mathcal{L}_l^\dagger - \imath)$  sobre  $\text{Ker}(\mathcal{L}_l^\dagger + \imath)$ , dados por

$$\mathcal{U}_\alpha \psi(s) = \alpha \psi(s)^*, \quad (\text{C.24})$$

donde  $\psi(s)$  corresponde a la solución de la ecuación (C.22), y  $\alpha \in \mathbb{C}$  es tal que  $|\alpha| = 1$ .

Cada extensión esencialmente autoadjunta  $\mathcal{L}_l^{(\alpha)}$  está definida en un dominio dado por [110]

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}_l^{(\alpha)}) = \{\phi(s) = \varphi(s) + \beta [\psi(s) + \alpha \psi(s)^*]; \varphi(s) \in \mathcal{C}_0^\infty[0, s_0], \beta \in \mathbb{C}\}, \quad (\text{C.25})$$

con  $\mathcal{L}_l^{(\alpha)}$  actuando sobre funciones de  $\mathcal{D}(\mathcal{L}_l^{(\alpha)})$  como

$$\mathcal{L}_l^{(\alpha)} \phi(s) = \mathcal{L}_l^\dagger \phi(s) = \mathcal{L}_l \varphi(s) + \imath \beta (\psi(s) - \alpha \psi(s)^*). \quad (\text{C.26})$$

En particular, notar que  $\phi(0) = 0$ .

Cada extensión esencialmente autoadjunta de  $\mathcal{L}_{l \geq 1}$  también puede ser caracterizada por la condición de contorno homogénea satisfecha por las funciones en  $\mathcal{D}(\mathcal{L}_l^{(\alpha)})$ , en  $s = s_0$ . En efecto, para todo  $\beta \neq 0$

$$\phi(s_0) = \beta (\psi(s_0) + \alpha \psi(s_0)^*), \quad (\text{C.27})$$

$$\phi'(s_0) = \beta (\psi'(s_0) + \alpha \psi'(s_0)^*),$$

de las cuales tenemos  $\phi'(s_0) + c(\alpha)\phi(s_0) = 0$ , con  $c(\alpha) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  (condición satisfecha también para  $\beta = 0$ .)

Para el caso  $l = 0$ , de (C.19) tenemos

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_{1/2}(\bar{z}_2) & \mathcal{K}_{1/2}(\bar{z}_2) \\ \mathcal{I}'_{1/2}(\bar{z}_2) & \mathcal{K}'_{1/2}(\bar{z}_2) \end{pmatrix}^{-1} \times \quad (\text{C.28})$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{I}_{1/2}(\bar{z}_1) & \mathcal{K}_{1/2}(\bar{z}_1) \\ \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_2}{\epsilon_2 \mu_1}} \mathcal{I}'_{1/2}(\bar{z}_1) & \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_2}{\epsilon_2 \mu_1}} \mathcal{K}'_{1/2}(\bar{z}_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}.$$

Como ambas matrices en esta expresión son invertibles, tenemos dos soluciones linealmente independientes,  $\psi_1(s)$  y  $\psi_2(s)$ , que corresponden respectivamente a

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.29})$$

En consecuencia,  $n_+(\mathcal{L}_0) = 2 = n_-(\mathcal{L}_0)$ .

Esto significa que existe una familia de extensiones autoadjuntas de  $\mathcal{L}_0$  que están en correspondencia uno a uno con los mapeos unitarios de  $\text{Ker}(\mathcal{L}_l^\dagger - \imath)$  sobre  $\text{Ker}(\mathcal{L}_l^\dagger + \imath)$ , dados por

$$\psi_+(s) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(s) \\ \psi_2(s) \end{pmatrix} \mapsto \psi_-(s) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \mathcal{U}^t \begin{pmatrix} \psi_1(s)^* \\ \psi_2(s)^* \end{pmatrix}, \quad (\text{C.30})$$

La condición  $\|\psi_-\| = \|\psi_+\|$  para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  implica que

$$\mathcal{U}^\dagger \mathcal{G}^t \mathcal{U} = \mathcal{G}, \quad (\text{C.31})$$

con  $\mathcal{G}_{kl} = (\psi_k, \psi_l)$ .

Sin embargo, si  $\psi_2(s) = \mathcal{K}_{1/2}(z_1) \sim \sqrt{\pi/2}(1 - z_1 + \mathcal{O}(z_1^2))$  para  $s \approx 0$  (con  $z_1 = e^{i\pi/4}\varepsilon\sqrt{\epsilon_1/\mu_1 s}$ ), es admitida en el dominio de la extensión de  $\mathcal{L}_0$ , el campo magnético correspondiente (ver (3.12)) debería ser  $B_{l,m;r} \sim (1/s^2)\psi_2(s) \sim r^{-2}$ , que no está en  $\mathbf{L}^2([0, \delta], r^2 dr)$ .

Deberíamos entonces tomar la extensión simétrica cerrada de  $\mathcal{L}_0$  relacionada con la isometría *parcial* de  $\text{Ker}(\mathcal{L}_0^\dagger - \imath)$  en  $\text{Ker}(\mathcal{L}_0^\dagger + \imath)$ , dada por

$$\beta \psi_1(s) \mapsto \beta \alpha \psi_1(s)^*, \quad (\text{C.32})$$

donde  $\alpha \in \mathbb{C}$  y  $|\alpha| = 1$ . Esto es, consideramos el operador cerrado simétrico  $\mathcal{L}_0^{(\alpha)}$ , definido sobre

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}_0^{(\alpha)}) = \{\phi(s) = \varphi(s) + \beta [\psi_1(s) + \alpha \psi_1(s)^*]; \varphi(s) \in \mathcal{C}_0^\infty[0, s_0]; \beta \in \mathbb{C}\}, \quad (\text{C.33})$$

como

$$\mathcal{L}_0^{(\alpha)} \phi(s) = \mathcal{L}_0^\dagger \phi(s) = \mathcal{L}_0 \varphi(s) + \imath \beta [\psi_1(s) - \alpha \psi_1(s)^*], \quad (\text{C.34})$$

donde  $\psi_1(s) = \mathcal{I}_{1/2}(z_1)$  ( $\sim z$  para  $s \approx 0$ .)

Como en el caso  $l \geq 1$ , estas extensiones pueden ser caracterizadas por las condiciones de contorno locales homogéneas que satisfacen las funciones en  $\mathcal{D}(\mathcal{L}_0^{(\alpha)})$ , para  $s = s_0$ :  $\phi'(s_0) + c(\alpha)\phi(s_0) = 0$ , con  $c(\alpha) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

En consecuencia, debemos seleccionar una extensión simétrica cerrada del operador de la ecuación (C.5) tomando  $B_1 = 0$  en (C.18) (lo que determina las funciones a ser incluidas en los dominios, (C.25) y (C.33)) e imponiendo una condición de contorno local homogénea sobre los campos para cada  $l \geq 0$ , en  $s = s_0$  (o sea, en  $r = R > a$ ).

### C.3. Las autofrecuencias

Como vimos antes, debemos imponer sobre los campo una condición de contorno local homogénea en  $s = s_0$ . Esto determina las funciones a ser incluidas en el dominio del operador relevante.

Elegimos encerrar al sistema con una gran esfera conductora de radio  $R$ , obteniendo la condición de Dirichlet en  $s = s_0 \equiv \mu_2 R + a_1 - a_2$  (con  $R > a$ ) para las funciones en el dominio de una extensión esencialmente autoadjunta de  $\mathcal{L}_l$ , que llamamos  $\mathcal{L}_l^{(D)}$ :

$$E_{\theta, \phi} \Big|_{r=R} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(s) \Big|_{s=s_0} = 0, \forall l \geq 1. \quad (\text{C.35})$$

Luego, las autofunciones de  $\mathcal{L}_l^{(D)}$  satisfacen

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{L}}_l \phi_\omega(s) &= \left(\frac{\mu}{\epsilon}\right)(s) \left\{ \frac{d^2}{ds^2} - \frac{l(l+1)}{[s-(a_1-a_2)\Theta(s-a_1)]^2} \right\} \phi_\omega(s) = \\ &= -\frac{\omega^2}{c^2} \phi_\omega(s),\end{aligned}\tag{C.36}$$

para  $s \neq a_1$ , y las condiciones de contorno

$$\begin{aligned}\phi_\omega(s)|_{s=0} &= 0, & \phi_\omega(s)|_{s=s_0} &= 0, \\ \phi_\omega(s)|_{s=a_1^+} &= \phi_\omega(s)|_{s=a_1^-}, & \phi'_\omega(s)|_{s=a_1^+} &= \phi'_\omega(s)|_{s=a_1^-}.\end{aligned}\tag{C.37}$$

Esto reduce el problema a buscar funciones con derivada segunda continua para  $s \neq a_1$ , que satisfacen

$$\left\{ \frac{d^2}{dz_1^2} + \left[ 1 - \frac{l(l+1)}{z_1^2} \right] \right\} \phi_\omega(s) = 0,\tag{C.38}$$

donde  $z_1 = s(\omega/c)\sqrt{\epsilon_1/\mu_1}$ , para  $s < a_1$ , y soluciones de la ecuación

$$\left\{ \frac{d^2}{dz_2^2} + \left[ 1 - \frac{l(l+1)}{z_2^2} \right] \right\} \phi_\omega(s) = 0,\tag{C.39}$$

donde  $z_2 = (s - a_1 + a_2)(\omega/c)\sqrt{\epsilon_2/\mu_2}$ , para  $s > a_1$ , las que además satisfacen las condiciones de contorno establecidas en (C.37). Luego,

$$\phi_\omega(s) = A_1 \mathcal{J}_{l+1/2}(z_1) + B_1 \mathcal{Y}_{l+1/2}(z_1), \text{ para } s < a_1\tag{C.40}$$

$$\phi_\omega(s) = A_2 \mathcal{J}_{l+1/2}(z_2) + B_2 \mathcal{Y}_{l+1/2}(z_2), \text{ para } a_1 < s < s_0,$$

donde  $\mathcal{J}_{l+1/2}(z) = z j_l(z)$  y  $\mathcal{Y}_{l+1/2}(z) = z y_l(z)$  son las funciones de Riccati - Bessel, y  $j_l(z)$  and  $y_l(z)$  son las funciones de Bessel esféricas [69].

Como

$$\mathcal{J}_{l+1/2}(z) = \frac{z^{l+1}}{\Gamma(2(l+1))} (1 + \mathcal{O}(z^2)),\tag{C.41}$$

$$\mathcal{Y}_{l+1/2}(z) = -\frac{\Gamma(2l)}{z^l} (1 + \mathcal{O}(z^2)),$$

La condición  $\phi(0) = 0$  implica que  $B_1 = 0, \forall l$ .

Para asegurar que  $\phi(s_0) = 0$ , podemos tomar

$$A_2 = \mathcal{Y}_{l+1/2}(\bar{z}_0), \quad B_2 = -\mathcal{J}_{l+1/2}(\bar{z}_0),\tag{C.42}$$

con  $\bar{z}_0 = (s_0 - a_1 + a_2)(\omega/c)\sqrt{\epsilon_2/\mu_2}$ .

Finalmente, las condiciones de continuidad en  $s = a_1$  dan

$$\begin{aligned} A_1 \mathcal{J}_{l+1/2}(\bar{z}_1) &= \mathcal{Y}_{l+1/2}(\bar{z}_0) \mathcal{J}_{l+1/2}(\bar{z}_2) - \mathcal{J}_{l+1/2}(\bar{z}_0) \mathcal{Y}_{l+1/2}(\bar{z}_2), \\ \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} A_1 \mathcal{J}'_{l+1/2}(\bar{z}_1) &= \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \left\{ \mathcal{Y}_{l+1/2}(\bar{z}_0) \mathcal{J}'_{l+1/2}(\bar{z}_2) - \mathcal{J}_{l+1/2}(\bar{z}_0) \mathcal{Y}'_{l+1/2}(\bar{z}_2) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

donde  $\bar{z}_{1,2} = a(\omega/c) \sqrt{\epsilon_{1,2} \mu_{1,2}}$ .

Luego, definiendo  $z = a\omega/c$ , las autofrecuencias quedan determinadas por los ceros de la función

$$\begin{aligned} \Delta_{l+1/2}^{TE}(z) &= \\ &= \mathcal{J}_{l+1/2}(\bar{z}_1) \left\{ \mathcal{Y}_{l+1/2}(\bar{z}_0) \mathcal{J}'_{l+1/2}(\bar{z}_2) - \mathcal{J}_{l+1/2}(\bar{z}_0) \mathcal{Y}'_{l+1/2}(\bar{z}_2) \right\} - \\ &\quad \xi \mathcal{J}'_{l+1/2}(\bar{z}_1) \left\{ \mathcal{Y}_{l+1/2}(\bar{z}_0) \mathcal{J}_{l+1/2}(\bar{z}_2) - \mathcal{J}_{l+1/2}(\bar{z}_0) \mathcal{Y}_{l+1/2}(\bar{z}_2) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.44})$$

donde  $\xi = \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_2}{\epsilon_2 \mu_1}}$ .

Notar que cada cero de  $\Delta_{l+1/2}^{TE}(z)$  determina un autovector de  $\mathcal{L}_l^{(D)}$ . En efecto, la función  $\phi(s)$  construida como arriba está en  $\mathcal{D}(\mathcal{L}_l^{(D)})$  y satisface la ecuación (C.36), siendo  $-(\omega/c)^2$  el autovalor correspondiente.

En consecuencia, todos los ceros de  $\Delta_{l+1/2}^{TE}(z)$  son reales o puramente imaginarios ( $\omega^2 \in \mathbb{R}$ ), porque el operador  $\mathcal{L}_l^{(D)}$  es esencialmente autoadjunto para todo  $l \geq 1$ .

## C.4. Las multiplicidades

La condición que determina los autovalores puede también entenderse desde el punto de vista siguiente. Primero notamos que para un valor dado de  $k \in \mathbb{C}$ , la ecuación diferencial

$$\hat{\mathcal{L}}_l \phi(s; k) = -k^2 \phi(s; k) \quad (\text{C.45})$$

tiene, para  $s \in (0, a_1)$  y  $s \in (a_1, s_0)$ , dos soluciones linealmente independientes en  $\mathcal{C}^\infty$ . Luego, una dada función que sea una solución a un lado del punto  $a_1$  se puede continuar como una solución al otro lado, para obtener una función  $\mathcal{C}^1(0, s_0)$  con una derivada segunda continua a trozos.

Ahora, llamemos  $\varphi(s; k)$  a una solución no trivial de cuadrado integrable de la ecuación (C.45) que satisface  $\varphi(0; k) = 0$  (única salvo una constante multiplicativa, ver (C.41)):

$$\varphi(s) = \mathcal{J}_{l+1/2}(z_1), \text{ para } 0 < s < a_1, \quad (\text{C.46})$$

con  $z_1 = s k \sqrt{\epsilon_1 / \mu_1}$ , y

$$\varphi(s) = A(k) \mathcal{J}_{l+1/2}(z_2) + B(k) \mathcal{Y}_{l+1/2}(z_2), \text{ para } a_1 < s < s_0, \quad (\text{C.47})$$

con  $z_2 = (s - a_1 + a_2) k \sqrt{\epsilon_2/\mu_2}$ , donde los coeficientes  $A(k)$  y  $B(k)$  se determinan por las condiciones de continuidad en  $s = a_1$ ,

$$\begin{aligned} A(k)\mathcal{J}_{l+1/2}(\bar{z}_2) + B(k)\mathcal{Y}_{l+1/2}(\bar{z}_2) &= \mathcal{J}_{l+1/2}(\bar{z}_1), \\ A(k)\mathcal{J}'_{l+1/2}(\bar{z}_2) + B(k)\mathcal{Y}'_{l+1/2}(\bar{z}_2) &= \sqrt{\frac{\epsilon_1\mu_2}{\epsilon_2\mu_1}}\mathcal{J}'_{l+1/2}(\bar{z}_1), \end{aligned} \quad (\text{C.48})$$

donde  $\bar{z}_{1,2} = a k \sqrt{\epsilon_{1,2}\mu_{1,2}}$ .

De manera similar, sean  $\chi(s; k)$  y  $\rho(s; k)$  funciones en  $\mathcal{C}^1(0, s_0)$  que satisfacen (C.45) para  $s \neq a_1$ , y las condiciones

$$\begin{aligned} \chi(s_0; k) &= 0, \quad \chi'(s_0; k) \neq 0, \\ \rho(s_0; k) &\neq 0, \quad \rho'(s_0; k) = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.49})$$

Para  $s > a_1$  podemos tomarlas como

$$\begin{aligned} \chi(s; k) &= \mathcal{Y}_{l+1/2}(\bar{z}_0)\mathcal{J}_{l+1/2}(z_2) - \mathcal{J}_{l+1/2}(\bar{z}_0)\mathcal{Y}_{l+1/2}(z_2), \\ \rho(s; k) &= \mathcal{Y}'_{l+1/2}(\bar{z}_0)\mathcal{J}_{l+1/2}(z_2) - \mathcal{J}'_{l+1/2}(\bar{z}_0)\mathcal{Y}_{l+1/2}(z_2), \end{aligned} \quad (\text{C.50})$$

donde  $\bar{z}_0 = (s - a_1 + a_2) k \sqrt{\epsilon_2/\mu_2}$ .

Como todas estas funciones son soluciones de (C.45) y son  $\mathcal{C}^1(0, s_0)$ , el Wronskiano de cualesquiera dos de ellas es una constante (dependiente de  $k$ ), para  $s < a_1$  y para  $s > a_1$ , y por lo tanto para  $0 < a_1 < s_0$ , que se anula si y sólo si las funciones seleccionadas son linealmente dependientes. En particular,

$$\begin{aligned} W[\rho(s; k), \chi(s; k)] &= \{\rho(s; k)\chi'(s; k) - \rho'(s; k)\chi(s; k)\}|_{s \rightarrow s_0} = \\ &= -k\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} (W[\mathcal{J}_{l+1/2}(\bar{z}_0), \mathcal{Y}_{l+1/2}(\bar{z}_0)])^2 \neq 0, \text{ para } k \neq 0, \end{aligned} \quad (\text{C.51})$$

porque  $\mathcal{J}_{l+1/2}(z_2)$  y  $\mathcal{Y}_{l+1/2}(z_2)$  son soluciones linealmente independientes de (C.45) para  $s > a_1$ .

Vamos a llamar

$$\begin{aligned} \eta(k) &:= W[\varphi, \chi] = \varphi(s; k)\chi'(s; k) - \varphi'(s; k)\chi(s; k), \\ \sigma(k) &:= W[\varphi, \rho] = \varphi(s; k)\rho'(s; k) - \varphi'(s; k)\rho(s; k). \end{aligned} \quad (\text{C.52})$$

Como hay sólo dos soluciones linealmente independientes de (C.45),  $\varphi(s; k)$  puede ser expresada como una combinación lineal de  $\chi(s; k)$  y  $\rho(s; k)$ . En efecto,

$$\begin{aligned} \eta(k)\rho(s; k) - \sigma(k)\chi(s; k) &= \{\varphi(s; k)\chi'(s; k) - \varphi'(s; k)\chi(s; k)\}\rho(s; k) - \\ &- \{\varphi(s; k)\rho'(s; k) - \varphi'(s; k)\rho(s; k)\}\chi(s; k) = W[\rho, \chi] \varphi(s; k). \end{aligned} \quad (\text{C.53})$$

En consecuencia,  $\varphi(s; k)$  y  $\chi(s; k)$  son proporcionales para un dado  $k$  (y luego, son soluciones  $\mathcal{C}^1(0, s_0)$  de (C.45) que satisfacen la condición de contorno de Dirichlet en  $s = 0, s_0$ ) si y sólo si  $\eta(k) = 0$ .

Luego, si  $\eta(k_0) = 0$  tenemos

$$\varphi(s; k_0) \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_l), \text{ y } \mathcal{L}_l \varphi(s; k_0) = -k_0^2 \varphi(s; k_0). \quad (\text{C.54})$$

Como  $\mathcal{L}_l^D$  es esencialmente autoadjunto,  $k_0^2 \in \mathbb{R}$ , lo cual implica que los ceros de  $\eta(k)$  son reales o puramente imaginarios.

Además, como  $\eta(k)$  es independiente de  $s$ , el Wronskiano puede ser evaluado en  $s = a_1$  para obtener

$$\eta(k) = W[\varphi, \chi](s = a_1) = \varphi(a_1^-; k) \chi'(a_1^+; k) - \varphi'(a_1^-; k) \chi(a_1^+; k), \quad (\text{C.55})$$

que es proporcional a  $\Delta_{l+1/2}^{TE}(ak)$ , como se puede verificar fácilmente (ver (C.46), (C.50) y (C.44)).

Finalmente, mostraremos que los ceros no nulos de  $\eta(k) \sim \Delta_{l+1/2}^{TE}(ak)$  son simples. Para esto, notamos primero que, como función de  $s$ ,  $(\partial\varphi/\partial k)(s; k) \in \mathcal{C}^1(0, s_0)$ , y  $(\partial\varphi/\partial k)(s; k) \sim s^{l+1}$  para  $s \approx 0^+$ . Esto se puede ver de las ecuaciones (C.46), (C.47) y (C.48). Además, para  $s \neq a_1$ ,

$$\left\{ \frac{d^2}{ds^2} - V_l(s) + \left( \frac{\epsilon}{\mu} \right)(s) k^2 \right\} \frac{\partial\varphi}{\partial k}(s; k) = -2k \left( \frac{\epsilon}{\mu} \right)(s) \varphi(s; k). \quad (\text{C.56})$$

Similarmente,  $(\partial\chi/\partial k)(s; k) \in \mathcal{C}^1(0, s_0)$  y, de (C.50), se puede mostrar que  $(\partial\chi/\partial k)(s; k) \rightarrow 0$  para  $s \rightarrow s_0$ .

Supongamos ahora que  $k_0 \neq 0$  es un cero múltiple de  $\eta(k)$ . Luego,  $\eta(k_0) = 0$  y  $\eta'(k_0) = 0$ . Se sigue de (C.53) y (C.51) que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial k}(s; k_0) = K_1 \chi(s; k_0) + K_2 \frac{\partial\chi}{\partial k}(s; k_0), \quad (\text{C.57})$$

para ciertas constantes  $K_1$  y  $K_2$ . Entonces también tenemos que  $(\partial\varphi/\partial k)(s; k_0) \rightarrow 0$  para  $s \rightarrow s_0$ .

En consecuencia,  $(\partial\varphi/\partial k)(s; k_0) \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_l^{(D)})$ . Además, como  $k_0^2 \in \mathbb{R}$ , podemos escribir

$$\begin{aligned} -2k_0 \parallel \varphi(s; k_0) \parallel_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^+, (\epsilon/\mu)\chi(s) ds)}^2 = \\ \left( \varphi(s; k_0), [\mathcal{L}_l + k_0^2] \frac{\partial\varphi}{\partial k}(s; k_0) \right)_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^+, (\epsilon/\mu)\chi(s) ds)} = \\ \left( [\mathcal{L}_l + k_0^2] \varphi(s; k_0), \frac{\partial\varphi}{\partial k}(s; k_0) \right)_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^+, (\epsilon/\mu)\chi(s) ds)} = 0, \end{aligned} \quad (\text{C.58})$$



Pero esto es una contradicción, porque  $\varphi(s; k_0) \neq 0$ . Luego, todos los ceros no nulos de  $\eta(k)$  son simples.

Se puede hacer un análisis completamente análogo para los modos TM, ahora imponiendo condiciones de contorno de Neumann en  $r = R$ , para concluir que las raíces de  $\Delta_{l+1/2}^{TM}(z)$  que yacen en el semiplano abierto derecho de la variable  $z$  son todas reales y simples.



# Apéndice D

## Cálculo numérico de partes finitas provenientes de altas frecuencias

### D.1. Cálculo numérico

En la sección 5.7.1 hemos hallado la contribución a la energía de Casimir de los modos de alta frecuencia, usando el modelo de Drude para describir la respuesta del medio dieléctrico. Aislando las singularidades ultravioletas, que se presentan como polos simples, hemos verificado que se trata de términos proporcionales al volumen accesible. Esto hace claro el tipo de contratérmino que se necesita en el procedimiento de renormalización. En esas condiciones, cobra sentido el análisis de la parte finita.

Con respecto a las partes finitas, hemos hallado el resultado que se muestra en la ecuación (5.88) para las primeras contribuciones de los modos de alta frecuencia en el desarrollo de Debye. Allí vemos, en primer lugar, un término proporcional a  $(R^3\Omega^4/c^3)$ , que proviene del primer orden del desarrollo (primer corchete de (5.88)), similar al término proporcional al volumen que aparece en la contribución de los modos de baja frecuencia, ecuación (5.49).

En la ecuación (5.88) también vemos que en las contribuciones que provienen de los sucesivos ordenes del desarrollo de Debye aparecen términos con potencias crecientes de  $R$  y de  $a$ . Algunos de esos términos se cancelan completamente al sumar las contribuciones de ordenes superiores; tal es el caso de aquellos proporcionales a  $(a\Omega/c) \log(a/R)$  y a  $(a\Omega/c) \log(R\Omega/c)$ , que aparecen en los ordenes  $\nu^{-1}$  y  $\nu^{-3}$  (tercer y cuarto corchete, respectivamente).

Entre esos mismos ordenes ocurren también cancelaciones parciales de los sucesivos términos con potencias positivas, tanto de  $a$  como de  $R$ , que van apareciendo con signos opuestos. Esto parece sugerir que las sucesivas potencias positivas de  $a$  y  $R$  son un *artefacto* del desarrollo empleado, y que van cancelándose entre sí a medida que se van incorporando órdenes superiores del desarrollo de Debye. Una manera de verificar esta hipótesis sería estimar numéricamente el término con la diferencia

$\left( \frac{d (\ln \Delta_\nu^{TE}(\imath \nu t))}{d t} - D_\nu^{TE}(t) \right)$  en el segundo término del lado derecho de (5.86), que no ha sido necesario para aislar las partes singulares y que hemos desestimado en primera instancia.

Desde luego que otro tanto debe ser tenido en cuenta para la contribución de los modos TM. En este apéndice nos ocuparemos de esos cálculos numéricos.

Sabemos que el término que contiene la diferencia  $\left( \frac{d (\ln \Delta_\nu^{TE}(\imath \nu t))}{d t} - D_\nu^{TE}(t) \right)$  converge, por construcción, para  $s > -2$ , y entonces podemos evaluarlo directamente en  $s = -1$ . Específicamente, debemos calcular

$$\frac{-\hbar c}{\pi R} \sum_{\nu=3/2}^{\infty} \nu^2 \Re \left\{ \int_{-\imath z}^{\infty} t \left( \frac{d (\ln \Delta_\nu^{TE}(\imath \nu t))}{d t} - D_\nu^{TE}(t) \right) dt \right\}, \quad (\text{D.1})$$

donde  $z = x/\nu$ , con  $x = R\Omega/c$ . Téngase en cuenta que el desarrollo asintótico de Debye para  $\Delta_\nu^{TE}(\imath \nu t)$  es válido para grandes valores de  $\nu$  (con  $t$  fijo), mientras que en la anterior expresión debemos sumar desde pequeños valores de  $\nu$ , donde es esperable que esa aproximación muestre un apartamiento significativo.

Para calcular numéricamente (D.1), cortamos la suma y la integral en valores  $L$  y  $T$ , elegidos de manera tal que la *cola* de la serie resulte menor que un dado error  $\varepsilon$ . Para determinar con qué precisión debemos trabajar, conviene primero analizar la magnitud de la contribución a la parte finita de la energía dada por el primer término del lado derecho de (5.86), ecuación (5.88).

Con este fin, proporcionamos valores numéricos a todos los parámetros que aparecen en la ecuación (5.88). Elegimos aquellos valores consistentes con los empleados en la aplicación a la sonoluminiscencia que hemos analizado en la sección 5.6. El gráfico de la expresión (5.88) cuando  $\Omega = 10^{16} \text{1/s}$ ,  $n_1 = 1$ ,  $10^{-6} \text{m} < a < 10^{-5} \text{m}$  está mostrado en la figura D.1.

Restando de (5.88) la expresión obtenida para  $a \rightarrow 0$ , podemos apreciar su dependencia intrínseca con  $a$ , lo que se muestra en la figura D.2.

De los valores numéricos de la figura D.2, vemos que en la ecuación (D.1) debemos cortar la suma y la integral en valores  $L$  y  $T$  tales que, para  $10^{-6} < a < 10^{-5}$ , el error  $\varepsilon$  cometido al descartar la contribución de la cola de la serie y la integral sea menor que  $10^{-14}$ .

Por simplicidad, elegimos  $L = T = N$ . Luego en la ecuación (D.1) podemos escribir

$$\sum_{\nu=3/2}^N \frac{-\hbar c \nu^2}{\pi R} \Re \left\{ \int_{-\imath z}^N t \left( \frac{d (\ln \Delta_\nu^{TE}(\imath \nu t))}{d t} - D_\nu^{TE}(t) \right) dt \right\} + \varepsilon(N), \quad (\text{D.2})$$

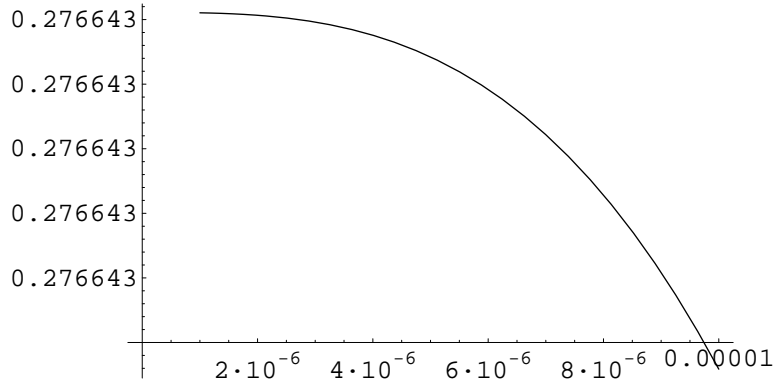


Figura D.1: Gráfico de la expresión (5.88) en función de  $a$ . En el eje horizontal,  $a$  varía en el intervalo  $[10^{-6} \text{ m}, 10^{-5} \text{ m}]$ . En el eje vertical, la energía se mide en Joules. Para los parámetros se han elegido los valores:  $\Omega = 10^{16} \text{ 1/s}$ ,  $n_1 = 1$  y  $R = 10^{-2} \text{ m}$ .

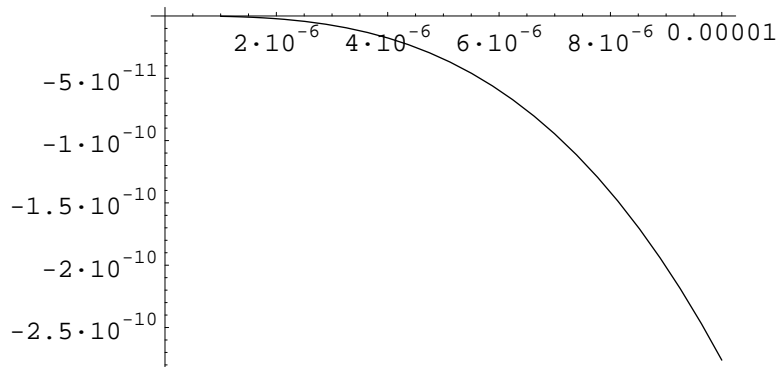


Figura D.2: Gráfico de la expresión (5.88) en función de  $a$ , luego de sustraer la constante que se obtiene de tomar el límite  $a \rightarrow 0$ . En el eje horizontal se muestra  $a$  variando en el intervalo  $[10^{-6} \text{ m}, 810^{-6} \text{ m}]$ . En el eje vertical, la energía varía entre  $-2 \cdot 10^{-13} \text{ J}$  y  $-1,4 \cdot 10^{-11} \text{ J}$ . Los valores de los parámetros son los mismos que los de la figura anterior.

donde

$$\begin{aligned} \varepsilon(N) = & \sum_{\nu=3/2}^{\infty} \frac{-\hbar c \nu^2}{\pi R} \Re \left\{ \int_N^{\infty} t \left( \frac{d(\ln \Delta_{\nu}^{TE}(\imath \nu t))}{d t} - D_{\nu}^{TE}(t) \right) dt \right\} + \\ & + \sum_{\nu=N}^{\infty} \frac{-\hbar c \nu^2}{\pi R} \Re \left\{ \int_{-\imath z}^N t \left( \frac{d(\ln \Delta_{\nu}^{TE}(\imath \nu t))}{d t} - D_{\nu}^{TE}(t) \right) dt \right\}. \end{aligned} \quad (D.3)$$

Podemos estimar  $\varepsilon(N)$  aproximando los integrandos con el orden siguiente del desarrollo de Debye de  $\frac{d(\ln \Delta_{\nu}^{TE}(\imath \nu t))}{d t}$  (que también es adecuado para grandes valores de  $t$ ), y reemplazar

$$\left( \frac{d(\ln \Delta_{\nu}^{TE}(\imath \nu t))}{d t} - D_{\nu}^{TE}(t) \right) \simeq \nu^{-4} f_{TE}(t), \quad (D.4)$$

donde  $f_{TE}(t)$  es cierta función algebraica.

Para los modos TM resultan expresiones análogas a las correspondientes a las ecuaciones (D.1) - (D.4). Por brevedad, de aquí en adelante consideraremos las contribuciones de ambos modos sumadas.

La función  $f(t) = f_{TE}(t) + f_{TM}(t)$ , para los modos TE y TM sumados, está dada

por

$$\begin{aligned}
f(t) = & \frac{n_1^4 R^2 t (13 - 16 n_1^2 t^2 - n_1^4 t^4) \Omega^2}{4 c^2 (1 + n_1^2 t^2)^5} + \\
& - \frac{(n_1^2 t (16 - 368 n_1^2 t^2 + 924 n_1^4 t^4 - 374 n_1^6 t^6 + 13 n_1^8 t^8))}{32 (1 + n_1^2 t^2)^7} - \\
& - \frac{n_1^6 R^4 t (a^6 + 4 R^6 + 3 a^2 n_1^2 (a^4 + 4 R^4) t^2) \Omega^4}{8 c^4 (1 + n_1^2 t^2)^3 (R^2 + a^2 n_1^2 t^2)^3} - \\
& - \frac{n_1^6 R^4 t (3 a^4 n_1^4 (a^2 + 4 R^2) t^4 + 5 a^6 n_1^6 t^6) \Omega^4}{8 c^4 (1 + n_1^2 t^2)^3 (R^2 + a^2 n_1^2 t^2)^3} + \\
& + \frac{n_1^2 R^4 t (20 - 186 n_1^2 t^2 + 180 n_1^4 t^4 - 13 n_1^6 t^6)}{16 (1 + n_1^2 t^2)^6 (R^2 + a^2 n_1^2 t^2)^2} + \\
& + \frac{a^2 n_1^2 R^2 t (-2 + 160 n_1^2 t^2 - 1116 n_1^4 t^4 + 960 n_1^6 t^6 - 65 n_1^8 t^8)}{32 (1 + n_1^2 t^2)^6 (R^2 + a^2 n_1^2 t^2)^2} + \\
& + \frac{a^4 n_1^4 t^3 (-2 + 120 n_1^2 t^2 - 744 n_1^4 t^4 + 600 n_1^6 t^6 - 39 n_1^8 t^8)}{32 (1 + n_1^2 t^2)^6 (R^2 + a^2 n_1^2 t^2)^2} + \\
& + \frac{n_1^4 R^6 t (5 - 9 n_1^2 t^2 - 12 n_1^4 t^4 + 2 n_1^6 t^6) \Omega^2}{4 c^2 (1 + n_1^2 t^2)^6 (R^2 + a^2 n_1^2 t^2)^2} + \\
& + \frac{a^4 n_1^6 R^2 t^3 (10 + 5 n_1^2 t^2 - 23 n_1^4 t^4 + 3 n_1^6 t^6) \Omega^2}{4 c^2 (1 + n_1^2 t^2)^5 (R^2 + a^2 n_1^2 t^2)^2} + \\
& + \frac{a^2 n_1^4 R^4 t (10 + 10 n_1^2 t^2 - 37 n_1^4 t^4 + 5 n_1^6 t^6) \Omega^2}{4 c^2 (1 + n_1^2 t^2)^5 (R^2 + a^2 n_1^2 t^2)^2} + \\
& + \frac{R^8 (-1 + 3 n_1^4 t^4) \Omega^4}{2 c^4 t^5 (1 + n_1^2 t^2)^3 (R^2 + a^2 n_1^2 t^2)^2} - \\
& - \frac{a^4 n_1^6 R^4 t (-3 - 2 n_1^2 t^2 + 9 n_1^4 t^4) \Omega^4}{8 c^4 (1 + n_1^2 t^2)^3 (R^2 + a^2 n_1^2 t^2)^2} - \\
& - \frac{a^2 n_1^2 R^6 (1 - 3 n_1^2 t^2 - 7 n_1^4 t^4 + 5 n_1^6 t^6) \Omega^4}{4 c^4 t^3 (1 + n_1^2 t^2)^3 (R^2 + a^2 n_1^2 t^2)^2}.
\end{aligned} \tag{D.5}$$

Con esta aproximación vemos que, como esperábamos, ambos términos en la ecuación (D.3) son convergentes, ya que  $f(t)$  se comporta como  $\mathcal{O}(t^{-5})$  para grandes

valores de  $t$ , y las sumas sobre  $\nu$  se pueden resolver en términos de funciones  $\zeta$  de Hurwitz o haciendo uso de la fórmula de suma de Euler Maclaurin [66].

Luego, calculando  $\varepsilon(N)$  e imponiendo  $|\varepsilon(N)| < 10^{-14}$  (con los valores de los parámetros que mencionamos antes), obtenemos el valor de  $N$  que necesitamos para el cálculo del primer término de (D.2). Obviamente este valor de  $N$  depende de  $a$ , pero por ejemplo en el intervalo  $10^{-6} \text{ m} < a < 8 \cdot 10^{-6} \text{ m}$  alcanza con tomar  $N = 3000$  para satisfacer esa cota.

Una vez determinado  $N$ , describimos el cálculo numérico del primer término de la ecuación (D.2). Sólo indicaremos los pasos seguidos y mostraremos los resultados.

En la integral que aparece en el primer término de (D.2), podemos deformar el camino de integración a una curva que une los puntos  $-iz$  y  $0$  sobre eje imaginario, y luego de  $0$  a  $N$  sobre el eje real. En la integral sobre el eje imaginario, se puede ver fácilmente que el término  $\left(t \frac{d(\ln \Delta_\nu^{TE}(i\nu t))}{dt}\right)$  da una contribución puramente imaginaria<sup>1</sup>, que es eliminada al tomar la parte real. Luego, en esa integral queda sólo la contribución de  $(t D_\nu^{TE}(t))$ , la cual puede ser calculada exactamente para  $\nu$  arbitrario.

Por otro lado, en la integración sobre el intervalo  $(0, N)$ , por consistencia con los resultados dados en la ecuación (5.88) (que fueron calculados hasta el orden  $\mathcal{O}\left(\frac{R\Omega}{c}\right)$ ), aproximamos la función  $\left(t \frac{d(\ln \Delta_\nu^{TE}(i\nu t))}{dt}\right)$  por su desarrollo para  $\left(\frac{R\Omega}{c}\right) \gg 1$ , reteniendo en este desarrollo términos hasta el mismo orden que en (5.88). Así, los términos que estamos despreciando son  $\mathcal{O}\left(\frac{R\Omega}{c}\right)^{-1}$  y no tienen influencia sobre los de (5.88). La ventaja es que, bajo esta aproximación, de nuevo podemos calcular la integral exactamente. Por último, la suma sobre  $\nu$  de las integrales anteriores se calcula numéricamente.

Como resultado de ese cálculo numérico, tenemos el gráfico que se muestra en la figura D.3, donde  $10^{-6} \text{ m} < a < 8 \cdot 10^{-6} \text{ m}$  y los valores de los demás parámetros son los que hemos dado antes.

Sustrayendo una constante aditiva, vemos la dependencia intrínseca de  $a$  en el gráfico de la figura D.4.

La gráfica D.4 debe compararse con la correspondiente al cálculo en el que se emplean los primeros términos del desarrollo de Debye, gráfica D.2. Superponiendo ambas gráficas obtenemos la figura D.5, en donde se aprecia claramente la cancelación que habíamos mencionado.

Ahora bien, como en la ecuación (5.88) hemos retenido potencias proporcionales a  $\left(\frac{a\Omega}{c}\right)^3$ ,  $\left(\frac{a\Omega}{c}\right)^2$  y  $\left(\frac{a\Omega}{c}\right)$  (y las análogas para  $R$ , que aquí es mantenido constante), esperamos que al sumar la contribución correspondiente al cálculo numérico estas

---

<sup>1</sup>Esto se logra haciendo el cambio de variables  $t \rightarrow e^{-i\pi/2}u$  y observando que el integrando queda una función real a ser integrada en el intervalo  $(0, R\Omega/c)$ , con una constante multiplicativa  $e^{-i\pi/2}$ , que da lugar a un resultado siempre imaginario.



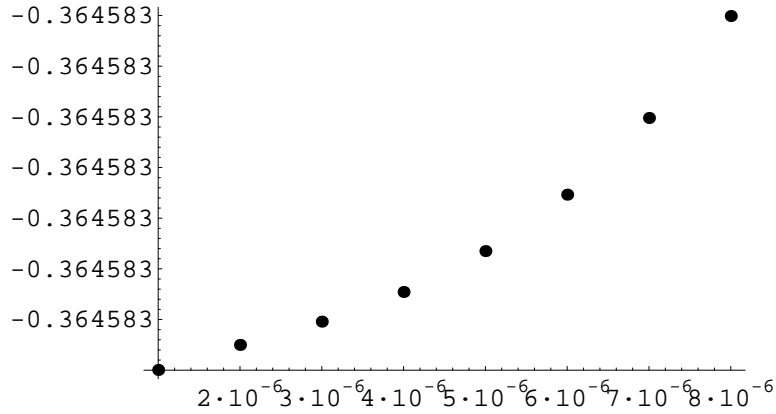


Figura D.3: Cálculo numérico del primer término de la ecuación (D.2). En el eje horizontal,  $a$  varía entre  $[10^{-6}m, 8 \cdot 10^{-6}m]$ . En el eje vertical, la energía se mide en Joules. Se ha tomado  $N = 3000$ .

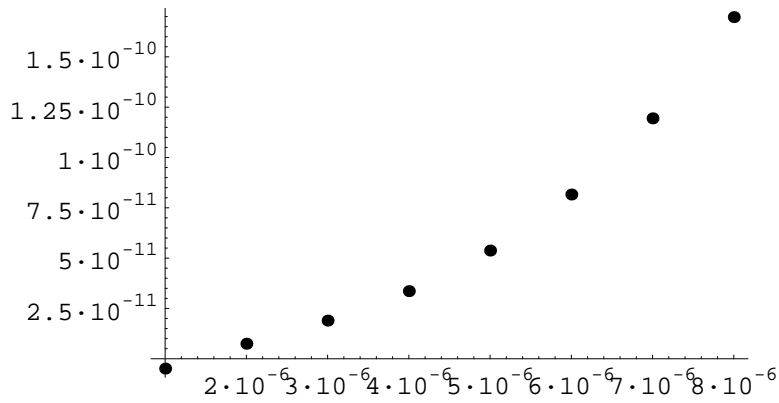


Figura D.4: Cálculo numérico del primer término de la ecuación (D.2), sustrayendo la constante aditiva ( $-0.36458251347$ ). En el eje horizontal,  $a$  varía entre  $[10^{-6}m, 8 \cdot 10^{-6}m]$ . En el eje vertical, la energía varía entre  $10^{-13}J$  y  $1.4 \cdot 10^{-11}J$ . Como antes,  $N = 3000$ .

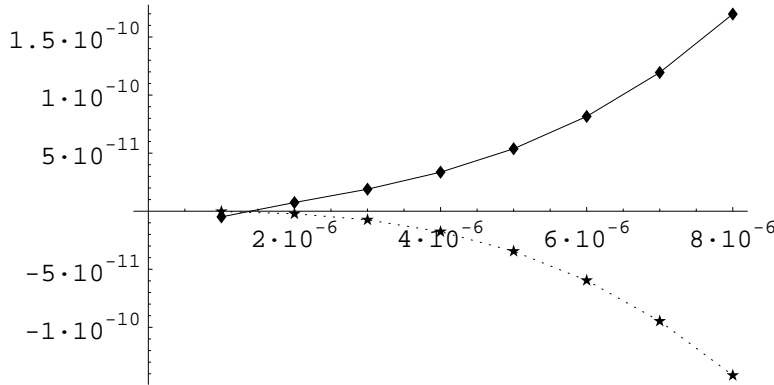


Figura D.5: Superposición de las gráficas D.2 (curva con línea llena) y D.4 (curva punteada).

potencias *espurias* se cancelen, quedando expuesta la contribución proporcional a  $\left(\frac{a\Omega}{c}\right)^{-1}$ , que no fue retenida en (5.88).

Esto es lo que efectivamente sucede, como podemos ver gráficamente en la figura D.6, obtenida a partir de la suma de las dos gráficas mostradas en la figura D.5. Por otro lado, esto puede verificarse a través de una regresión por cuadrados mínimos de los datos, que también es mostrada en la figura D.6.

En efecto, si en el resultado de la ecuación (5.88) (cuya gráfica es la curva con línea llena de la figura D.5) los términos con potencias positivas de  $a$  fueran espurios, deberíamos observar su cancelación cuando sumemos la contribución numérica (curva punteada de la figura D.5). La expresión analítica de (5.88) como función de  $a$ , una vez ingresados los valores de los demás parámetros, es  $-1,34277 \cdot 10^{-11} a + 0,00477465 a^2 - 276644 \cdot a^3$ . Por otro lado, una regresión por cuadrados mínimos de los datos obtenidos del cálculo numérico mostrado en la figura D.5, arroja la expresión  $-9,09208 \cdot 10^{-12} - \frac{5,99188 \cdot 10^{-18}}{a} + 1,34277 \cdot 10^{-11} a - 0,00477465 a^2 + 276644 \cdot a^3$ . La suma de las dos expresiones de arriba proporciona la función que rige el comportamiento de la curva del medio de la figura D.6. Vemos pues la cancelación que habíamos mencionado, ya que esta curva tiene un comportamiento con  $a$  de la forma  $\alpha + \frac{\beta}{a} \cdot 2$ .

Dada la magnitud de estas contribuciones, el resultado de este cálculo numérico resulta ser una verificación de que la contribución más relevante a la parte finita de la energía de Casimir proviene efectivamente del rango de bajas frecuencias. En particular, como se mencionó al final de la sección 5.7.1, esto valida los resultados cualitativos obtenidos en la aplicación al fenómeno de la sonoluminiscencia.

<sup>2</sup>Si en el resultado de la ecuación (5.88) hubiéramos retenido términos proporcionales a  $\left(\frac{a\Omega}{c}\right)^{-1}$  y ordenes superiores, ellos también se hubieran cancelado al sumar la contribución numérica.

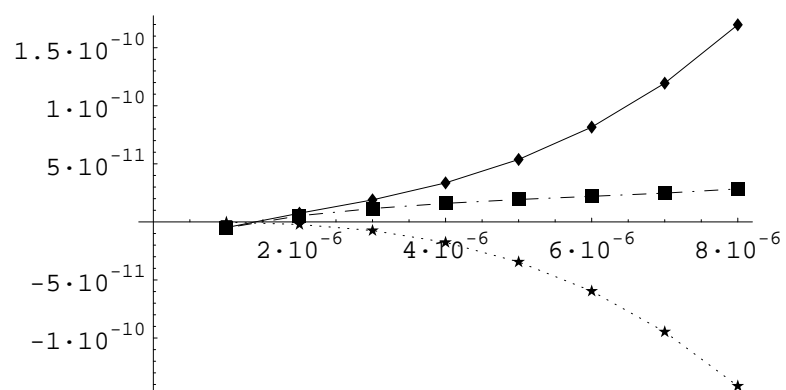


Figura D.6: La curva del medio corresponde a la suma de las gráficas D.2 y D.4.



# Índice de figuras

A.1. Gráfico tomado de la referencia [25], que muestra la evolución del radio de la burbuja sonoluminiscente ( <b>a</b> ), la presión que ejerce sobre ella la onda sonora ( <b>b</b> ), y la emisión del pulso de luz ( <b>c</b> ). . . . .	108
D.1. Gráfico de la expresión (5.88) en función de $a$ . En el eje horizontal, $a$ varía en el intervalo $[10^{-6} \text{ m}, 10^{-5} \text{ m}]$ . En el eje vertical, la energía se mide en Joules. Para los parámetros se han elegido los valores: $\Omega = 10^{16} \text{ 1/s}$ , $n_1 = 1$ y $R = 10^{-2} \text{ m}$ . . . . .	133
D.2. Gráfico de la expresión (5.88) en función de $a$ , luego de sustraer la constante que se obtiene de tomar el límite $a \rightarrow 0$ . En el eje horizontal se muestra $a$ variando en el intervalo $[10^{-6} \text{ m}, 8 \cdot 10^{-6} \text{ m}]$ . En el eje vertical, la energía varía entre $-2 \cdot 10^{-13} \text{ J}$ y $-1,4 \cdot 10^{-11} \text{ J}$ . Los valores de los parámetros son los mismos que los de la figura anterior. . . . .	133
D.3. Cálculo numérico del primer término de la ecuación (D.2). En el eje horizontal, $a$ varía entre $[10^{-6} \text{ m}, 8 \cdot 10^{-6} \text{ m}]$ . En el eje vertical, la energía se mide en Joules. Se ha tomado $N = 3000$ . . . . .	137
D.4. Cálculo numérico del primer término de la ecuación (D.2), sustrayendo la constante aditiva $(-0,36458251347)$ . En el eje horizontal, $a$ varía entre $[10^{-6} \text{ m}, 8 \cdot 10^{-6} \text{ m}]$ . En el eje vertical, la energía varía entre $10^{-13} \text{ J}$ y $1,4 \cdot 10^{-11} \text{ J}$ . Como antes, $N = 3000$ . . . . .	137
D.5. Superposición de las gráficas D.2 (curva con línea llena) y D.4 (curva punteada). . . . .	138
D.6. La curva del medio corresponde a la suma de las gráficas D.2 y D.4. . . . .	139



# Bibliografía

- [1] H.B.G. Casimir, Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. **51**, 793, 1994.
- [2] V.M. Mostepanenko and N.N. Trunov, *The Casimir Effect and its applications*, Clarendon Press, Oxford, 1997.
- [3] M. Bordag, U. Mohideen, V.M. Mostepanenko, Phys. Rept. 353 (2001) 1-205.
- [4] P.B. Gilkey, *Invariance Theory, the Heat Equation and the Atiyah-Singer Index Theorem*, CRC Press, 1995.
- [5] Klaus Kirsten, *Spectral functions in mathematics and physics*, Trends in Theoretical Physics II, ed. H. Falomir, R. E. Gamboa Saraví, y F. A. Schaposnik, AIP Conference Proceedings **484**, American Institute of Physics, U. S. A., 1999.
- [6] Giampiero Esposito, Cambridge Lect. Notes Phys. **12** (1998) 1-209.
- [7] A.P. Calderón, *Lectures notes on pseudodifferential operators and elliptic boundary value problems, I*, Publicaciones del I.A.M., Buenos Aires, 1976.
- [8] Thomas P. Branson, Peter B. Gilkey, and Dmitri V. Vasilevich, Boll. Union. Mat. Ital. **11B** (1997) 39-67 ; J. Math. Phys. **39**, 1040-1049, 1998.
- [9] Bordag, E. Elizalde, and K. Kirsten, J. Math. Phys. **37**, 895-916, 1996.
- [10] S. Dowker and J. S. Apps, Int. J. Mod. Phys. **D5**, 799–812, 1996.
- [11] Klaus Kirsten, Class. Quant. Grav. **15**, 1998, L5.
- [12] Thomas P. Branson, Peter B. Gilkey, K. Kirsten and D. Vassilievich, Nucl. Phys. **B563** (1999) 603-626.
- [13] Peter D. D'Éath and Giampiero Esposito, Physical Review (D44):1713, 1991; Physical Review **D43** (1991) 3234.
- [14] Klaus Kirsten and Guido Cognola, Class. Quant. Grav. **13**, 633-644, 1996.

- [15] Giampiero Esposito, *Quantization of field theories in the presence of boundaries, General Relativity and Gravitational Physics*, Proceedings of the 11th Italian Conference on General Relativity and Gravitation, ed. M. Carfora et al., World Scientific 1996.
- [16] M. Rho, Physics Reports **240**(1,2), 1-142, 1994.
- [17] M. De Francia, H. Falomir, and E. M. Santangelo, Physics Letters **B371**, 285-292, 1996.
- [18] M. De Francia, H. Falomir, and M. Loewe, Phys. Rev. **D55**, 2477-2485, 1997.
- [19] C. G. Beneventano and M. De Francia and E. M. Santangelo, Int. J. Mod. Phys. **A14** (1999) 4749-4762.
- [20] P. Giacconi and R. Soldati, J. Phys. **A33** (2000) 5193-5206.
- [21] J.S.Dowker and R. Critchley, Phys. Rev. **D13**, 3224, 1976; S.W. Hawking, Commun. Math. Phys. **55**, 133, 1977.
- [22] C.G.Beneventano and E. M. Santangelo, Journal of Mathematical Physics **42**, 3260-3269, 2001; Proceedings International Meeting on Quantum Gravity and Spectral Geometry, Napoli, Italia, 2001; Nuclear Physics B [Proceedings Supplement] **104**, 189-192, 2002.
- [23] E. M. Santangelo, Proceedings International V.A. Fock School for Advances in Physics, San Petesburgo, Rusia, 2000; Theoretical and Mathematical Physics **131**, 607-622.
- [24] S.K. Lamoreaux, Phys. Rev. Lett. **78**, 6, 1997; U. Mohideen and A. Roy. Phys. Rev. Lett. **81**, 4549, 1998.
- [25] R. Lofstedt, B. P. Barber, R. A. Hiller and S. J. Putterman, Physics Reports **281**, 65 - 143, 1997.
- [26] J. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci., **89**, 4091, 1992; **89**, 11118, 1992; **90**, 958, 1993; **90**, 2105, 1993; **90**, 4505, 1993; **90**, 7285, 1993; **91**, 6473, 1994.
- [27] I. Brevik, V.N. Marachevsky and K.A. Milton, Phys. Rev. Lett. **82**, 3948, 1999.
- [28] K. Milton, *J. Schwinger and the Casimir effect: the reality of the zero-point energy*, The Casimir effect 50 years later, Editor: M. Bordag, World Scientific, 1999.
- [29] Kimball A. Milton and Y. Jack Ng, Phys. Rev. **E55**, 4207, 1997; *ibid* **E57**, 5504, 1998.
- [30] C. Molina-Paris and Matt Visser, Phys. Rev. **D56**, 6629-6639, 1997.



- [31] C. E. Carlson, C. Molina-Paris, J. Perez-Mercader and Matt Visser, Phys. Rev. **D56**, 1262-1280, 1997.
- [32] S. Liberati, Matt Visser, F. Belgiorno and D. W. Sciama, J. Phys. **A33**, 2251, 2000; Phys. Rev. Lett. **83**, 678, 1999.
- [33] S. Liberati, Matt Visser, F. Belgiorno and D. W. Sciama, Phys. Rev. **D61**, 085023, 2000; Phys. Rev. **D61**, 085024, 2000.
- [34] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2nd. ed. (Wiley, N. Y.), 1975.
- [35] B.V. Deriagin and I.I. Abrikosova, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **30**, 993 (1956); **31**, 3 (1956) [Engl. transl. Soviet Phys. JETP **3**, 819 (1956); **4**, 2 (1957)]; A. Kitchener and A.P. Prosser, Proc. Roy. Soc. (London) **A242**, 403 (1957); W. Black, J.G.V. de Jongh, J. Th. G. Overbeck, and M.J. Sparnaay, Trans. Faraday Soc. **56**, 1597 (1960); A. van Silfhout, Contemp. Phys. **11**, 559 (1970); J.N. Israelachivili and D. Tabor, Proc. Roy. Soc. (London) **A331**, 19 (1972).
- [36] M. Bordag, U. Mohideen, and V.M. Mostepanenko, Phys. Rept. **353**, 1, 2001.
- [37] H. B. Chan, V. A. Aksyuk, R. N. Kleiman, D. J. Bishop and F. Capasso, Science **291**, 1941, 2001.
- [38] H. B. Chan, V. A. Aksyuk, R. N. Kleiman, D. J. Bishop and F. Capasso, Phys. Rev. Lett. **87**, 211801, 2001.
- [39] H.B.G. Casimir, Physica **19**, 846, 1956.
- [40] T.H. Boyer, Phys. Rev. **174**, 1761, 1968.
- [41] R. Balian and B. Duplantier, Ann. Phys. (N.Y.) **112**, 165, 1978.
- [42] R.L. Jaffe and A. Scardicchio, Phys. Rev. Lett. **92**, 070402, 2004.
- [43] K.A. Milton, L.L. DeRaad Jr., and J. Schwinger, Ann. Phys. (N.Y.) **115**, 388, 1978.
- [44] J. Schwinger, Lett. Math. Phys. **1** 43, 1975.
- [45] F. Sauer, PhD. Thesis, Göttingen, 1962.
- [46] J. Mehra, Physica **37** 145, 1967.
- [47] E.M. Lifshitz, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **29** 94, 1956. [English transl.: Soviet Phys. JETP **2** 73, 1956].
- [48] V.B. Svetovoy and M.V. Lokhanin, Phys. Lett. **A280**, 177, 2001.
- [49] M Boström and Bo E. Sernelius, Phys. Rev. **A61**, 052703, 2000.

- [50] B.E. Sernelius and M Boström, Phys. Rev. Lett. **87**, 259101, 2001.
- [51] M. Bordag, B. Geyer, G.L. Klimchitskaya and V.M. Mostepanenko, Phys. Rev. Lett. **85**, 503, 2000; Phys. Rev. Lett. **87**, 259102, 2001.
- [52] S. Lamoreaux, Phys. Rev. Lett. **87**, 139101, 2001.
- [53] I. Brevik, J.B. Aarseth and J.S. Høye, Phys. Rev. **E66**, 026119, 2002.
- [54] V.B. Bezerra, G.L. Klimchitskaya and V.M. Mostepanenko, Phys. Rev. **A66**, 062112, 2002.
- [55] V.B. Bezerra, R.S. Decca, E. Fischbach, B. Geyer, G.L. Klimchitskaya, D.E. Krause, D. Lopez, V.M. Mostepanenko and C. Romero, *Comment on on the temperature dependence of the casimir effect*, quant-ph/0503134.
- [56] H. B. G. Casimir and D. Polder, Phys. Rev. **73**, 360, 1948.
- [57] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*, Pergamon, Oxford, 1960.
- [58] G. Barton, J. Phys. A: Math. Gen. **32**, 525, 1999.
- [59] S.G. Mamayev and V.M. Mostepanenko, In Proceedings of the Third Seminar on Quantum Gravity. (1985) World Scientific, Singapore.
- [60] P. Hasenfratz and J. Kuti, Physics Reports **C40**, 75-179, 1978.
- [61] K. Johnson, In *Particles and Fields*, B. Margolis and D.G. Stairs editors, page 353, 1979, New York, 1980, AIP.
- [62] K.A. Milton, Phys. Rev. **D22**, 1441 (1980); Phys. Lett. **B104**, 49, 1981.
- [63] K.A. Milton, *The Casimir Effect: Physical Manifestations of Zero-Point Energy*, World Scientific, Singapore, 2001.
- [64] M. P. Brenner, S. Hilgenfeldt and D. Lohse, Rev. Mod. Phys. **74**, 425, 2002.
- [65] G. Cognola, E. Elizalde, K. Kirsten, J. Phys. **A34** (2001) 7311-7327.
- [66] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, New York, 1980.
- [67] M. Santangelo, Theor. Math. Phys. 131 (2002) 527-542.
- [68] K. Kirsten, *Spectral functions in mathematics and physics*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2001.
- [69] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York, 1972.

- [70] R.T. Seeley, A. M. S. Proc. Symp. Pure Math. **10**, 288, 1967.
- [71] R.T. Seeley, Am. Journ. Math. **91**, 889, 1969.
- [72] R.T. Seeley, Am. Journ. Math. **91**, 963 1969.
- [73] P. Pisani, *Funciones espectrales de operadores singulares*, Tesis Doctoral, UNLP, 2004.
- [74] A. Romeo, Phys. Rev. **D52**, 7308, 1995.
- [75] H. Falomir, K. Kirsten and K. Rébora, Journal of Physics A: Math. Gen. **34**, 6291-6299, 2001.
- [76] H. Falomir, M. Loewe, K. Rébora, Phys. Rev. **D63**, 025015, 2001.
- [77] M. Bordag, E. Elizalde and K. Kirsten. J. Math. Phys. **37**, 895, 1996.
- [78] E. Elizalde, S. Leseduarte and A. Romeo. J. Phys. **A26**, 2409, 1993.
- [79] S. Leseduarte and A. Romeo. J. Phys. **A27**, 2483, 1994.
- [80] M. Bordag, K. Kirsten and D. Vassilevich, Phys. Rev. **D59**, 085011, 1999.
- [81] J. S. Høye, I. Brevik and J. B. Aarseth, Phys. Rev. **E63** (2001) 051101.
- [82] V. V. Nesterenko and I. G. Pirozhenko, Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **67**, 420, 1998 [JETP Lett. **67**, 445, 1998].
- [83] R. Balian and C. Bloch, Ann. Phys. (N. Y.) **60**, 401, 1970.
- [84] J. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci. **89**, (1992) 4091; *ibid* **89**, (1992) 11118, *ibid* **90**, (1993) 958; *ibid* **90**, (1993) 2105; *ibid* **90**, (1993) 4504; *ibid* **90**, (1993) 7285; *ibid* **91**, (1994) 6473.
- [85] H. B. G. Casimir and D. Polder, Phys. Rev. **73**, 360, 1948.
- [86] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*, Pergamon, Oxford, 1960.
- [87] V. M. Mostepanenko and N. N. Trunov, *The Casimir effect and its applications*, Oxford Science Publications, New York, 1997.
- [88] P. Candelas, Ann. Phys. **143**, 241, 1982.
- [89] J. Baake and G. Krusemann, Z. Phys. **C30**, 413, 1986.
- [90] G. Plunien, B. Müller and W. Greiner, Phys. Rep. **134**, 87, 1986.
- [91] I. Brevik, I. Skurdal and R. Solie, J. Phys. A: Math. Gen., **27**, 6853, 1994.

- [92] I. Brevik and T. A. Yousef, J. Phys. A: Math. Gen., **33**, 5189, 2000.
- [93] J. S. Høye, I. Brevik and J. B. Aarseth, Phys. Rev. E **63** (2001) 051101.
- [94] I. Brevik, V.N. Marachevsky and K.A. Milton. Phys. Rev. Lett. **82**, 3948, 1999.
- [95] Claudia Eberlein, Phys. Rev. Lett. **76**, 3842, 1996.
- [96] Claudia Eberlein, Phys. Rev. **A53**, 2772, 1996.
- [97] Kimball A. Milton and Y. Jack Ng, Phys. Rev. **E57**, 5504, 1998.
- [98] M. Bordag, K. Kirsten, and D. Vassilevich, Phys. Rev. **D59**, 085011, 1999.
- [99] G. Lambiase, G. Scarpetta and V. V. Nesterenko, Mod. Phys. Lett. **A16** (2001) 1983-1995.
- [100] V. N. Marachevsky, Phys. Scripta **64** (2001) 205-211.
- [101] V. N. Marachevsky, Mod. Phys. Lett. **A16** (2001) 1007-1016.
- [102] H. Falomir y K. Rébora, *Casimir energy for spherically symmetric dispersive dielectric media*, hep-th/0107023.
- [103] G. H. Hardy, *Divergent Series*, AMS Chelsea Publishing, Providence, Rhode Island, 1991.
- [104] N. W. Ashcroft and N. D. Mermin, *Solid State Physics*, Saunders College Publishing, Philadelphia, 1976.
- [105] H. B. Chan, V. A. Aksyuk, R. N. Kleiman, D. J. Bishop, and F. Capasso, Science **291**, 1941, 2001; Phys. Rev. Lett. **87**, 211801, 2001.
- [106] E. Bucks and M. L. Roukes, Phys. Rev. **B63**, 033402, 2001.
- [107] C. Genet, A. Lambrecht, and S. Reynaud, Phys. Rev. **A62**, 012110, 2000; Int. Mod. Phys. **A17**, 761, 2002.
- [108] F. Chen, G. L. Klimchitskaya, U. Mohideen, and V.M. Mostepanenko, Phys. Rev. Lett. **90**, 160404, 2003.
- [109] I. Brevik and V. N. Marachevsky, Phys. Rev. **D60**, 085006, 1999.
- [110] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical analysis II: Fourier analysis and self-adjointness*, Wiley, New York, 1975.